



Universidad
Carlos III de Madrid

Departamento de Ingeniería Mecánica

INGENIERÍA INDUSTRIAL

PROYECTO FIN DE CARRERA

ANÁLISIS DE EJES FERROVIARIOS
MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS
ELEMENTOS FINITOS
Y TÉCNICAS ANALÍTICAS

Autor: Francisco Julián Rebollo Giménez

Tutor: Higinio Rubio Alonso

Leganés, julio de 2012

Título: Análisis de ejes ferroviarios mediante el método de los
elementos finitos y técnicas analíticas.

Autor: Francisco Julián Rebollo Giménez

Tutor: Higinio Rubio Alonso

EL TRIBUNAL

Presidente: _____

Vocal: _____

Secretario: _____

Realizado el acto de defensa y lectura del Proyecto Fin de Carrera el día 18 de julio de 2012 en Leganés, en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid, acuerda otorgarle la CALIFICACIÓN de

VOCAL

SECRETARIO

PRESIDENTE

A mi abuelo, Julián Rebollo Vallejo

Agradecimientos

En el año 2006 me matriculé en la Universidad Carlos III de Madrid en Ingeniería Industrial. Desde muy pequeño dicha carrera había sido mi vocación y la meta que me alentaba a continuar ante las dificultades; parecía que mi sueño comenzaba a hacerse realidad... ¡Qué ignorancia la mía!

No sé si fue por vaguería, por inmadurez, por esa nueva libertad de acción que me brindaba ser universitario o por otros innumerables aspectos que no vienen al caso; la cuestión es que fracasé. En un año, es decir, tres periodos de exámenes (febrero, junio y septiembre) aprobé una sola asignatura de un total de diez. Para mí, aquello supuso un varapalo sin precedentes. Lo que había deseado durante toda mi vida se esfumaba. ¿Valdría para ser ingeniero?, ¿sería mi verdadera vocación?,...

Sin embargo, reaccioné y logré *“salir del pozo”* con la ayuda de las personas que me querían y me apreciaban (a todas ellas intentaré hacer referencia posteriormente). No podía abandonar mi sueño tan fácilmente, por lo que en 2007, decidí matricularme en *“La Técnica”*, pero con el claro objetivo de volver a *“La Superior”*, aquello que me había llevado a la Universidad.

El cometido no era sencillo: Bolonia me perseguía, sólo tenía tres años para terminar una carrera que se finalizaba en una media de cinco. A pesar de ello algo había cambiado en mí: aprendí que el fracaso no existía, sino que todo lo ocurrido había sido una lección que corroboraba aquel famoso dicho *“quien algo quiere, algo le cuesta”*. Me enseñó que, si quería llegar a mi meta, tenía que trabajar como nunca lo había hecho. Bajo esa premisa, *“La Técnica”* me mostró una parte del mundo de la Ingeniería que no hubiera podido conocer de otra forma, y confirmé que mi vocación era ser Ingeniero. En 2010 me gradué como Ingeniero Técnico Industrial y me matriculé de nuevo en *“La Superior”*, el penúltimo reto que me quedaba por superar. Hoy, dos años después de aquello, con el presente Proyecto Fin de Carrera, finalizo mis estudios de Ingeniería Industrial. ¿La más valiosa lección que he aprendido en la Universidad? La repito: el sacrificio, el trabajo y el esfuerzo.

Desde que terminé *“La Técnica”*, las cosas no han cambiado demasiado. Las mismas personas que entonces me ayudaron son las que ahora me apoyan. Algunos se han ido, pero están; otros se han ido definitivamente y no sé si volverán, sin embargo, voy a repetir –casi- los

misimos agradecimientos que llevé a cabo en el Proyecto que presenté en 2010 porque, como entonces señalé, “este agradecimiento es para todo aquel que haya participado, de cualquier forma, en el proceso que ahora finalizo y ruego me disculpen si he olvidado a alguien en las próximas líneas.”

A mis padres, Julián y Asun, por ser los que me han guiado a lo largo de todos los años de mi vida y los que, a pesar de todos los errores que he cometido y seguiré cometiendo, me han apoyado y aconsejado en cualquier empresa, por estúpida que pareciera, en la que me he enrolado.

A mi hermana Ana. Mi anterior proyecto te lo dediqué a ti. En aquel momento nuestras vidas se separaban y te iba a echar mucho de menos. Hoy te sigo añorando de la misma forma, pero creo que escoger aquel camino es lo mejor que te ha podido pasar. Sigue madurando como hasta ahora y, pase lo que pase, por duro que sea, no abandones nada de lo que te propongas, porque eres igual (mejor, diría yo) que cualquier otro que se ponga a tu lado. Gracias por tu apoyo y por tu preocupación.

Querido abuelo Julián, te has marchado antes de que pudiéramos celebrar el fin de mis estudios con un fuerte abrazo. Aun así, sé que estás a mi lado. Este proyecto está dedicado a ti. A mi abuela Rosi, que siempre se ha preocupado por mí. Y a mis otros abuelos, Paco y Tomi: sé que estáis todos los días a mi lado aunque, muy a mi pesar, no podáis celebrar la consecución de mi carrera como a mí me hubiese gustado.

Al resto de mi familia: Alberto, M^a Elena, Miguel, Elena, Julita, Josefina, Luisita (también te echaré en falta) y, en definitiva, a todos los presentes y ausentes que deseen pertenecer a este grupo y que siempre me han apoyado.

A todos mis amigos: Aurelio, Borja, Elena, Javi, Lauritxa, Lori, M^a Dolores, Paloma, Rober, Ro; por aguantar mis “chapas” y estar siempre ahí.

A mis profesores del colegio San Francisco de Asís (Madrid) por moldear mi mente y aportarme los conocimientos necesarios para llegar a conseguir mi meta.

A toda mi “gente” de Pinilla del Valle, el pueblo más pequeño del Valle del Lozoya pero el más fiestero.

A mis enemigos, por haberme ayudado a superarme.

A todos los compañeros, que ya son amigos (Aitor, Alberto, Alex, Borja, Elisa, Isra, Javi, Laura, Mario, Raúl, Rubén,...), y demás miembros de la Universidad Carlos III de Madrid, mereciendo especial mención mis tutores: Alejandro Quesada González, por haber contribuido al desarrollo del proyecto de I.T.I. Mecánica (y, por tanto, a éste que hoy presento), y a Higinio Rubio Alonso, por haber formado parte del proceso que me ha llevado a finalizar el presente Proyecto Fin de Carrera.

Todos habéis formado parte de mi vida y mi formación. Muchas gracias a todos.

Resumen

Junio de 2009. Un terrible accidente ferroviario sacude a la ciudad italiana de Viareggio debido al descarrilamiento de un ferrocarril cargado de GLP (Gas Licuado del Petróleo) que explota dejando 32 muertos. Dicho descarrilamiento se produce debido a la rotura por fatiga de un eje de uno de los vagones.

¿Cuál fue la causa de este accidente?, ¿fue verdaderamente algo imprevisible o consecuencia de algún tipo de negligencia?, ¿qué se puede hacer para evitar este tipo de sucesos?, ¿son diseñados los vehículos ferroviarios con suficiente seguridad?,...

En el presente proyecto se llevará a cabo un breve recorrido por la historia del ferrocarril y se analizarán los diferentes conceptos ferroviarios básicos: superestructura, infraestructura, enclaves ferroviarios, material rodante ferroviario (analizando sus componentes y los principios de funcionamiento de los más importantes). Asimismo, se profundizará en el concepto de eje ferroviario y sus implicaciones.

También se llevarán a cabo diferentes estudios sobre un eje ferroviario determinado (análisis de tensiones y deformaciones, análisis a fatiga y análisis del eje fisurado) mediante técnicas analíticas y el método de los elementos finitos (MEF) para, finalmente, realizar el estudio adimensional del mismo con objeto de establecer cómo interpretar los resultados obtenidos en un banco de ensayos.

Todo ello con el objeto de intentar dar respuesta a las cuestiones anteriores.

Abstract

It was June 2009. A terrible rail accident shakes the Italian city of Viareggio due to the derailment of a train loaded with LPG (Liquid Petroleum Gas) that explodes and causes 32 deaths. The above derailment is caused by a crack in the axle of one wagon due to fatigue.

What was the cause of this accident? Was it unforeseeable or a consequence of any sort of negligence? What can be done to avoid these kinds of events? Are rail vehicles designed safely enough? ...

In the present project, we will briefly run through the history of the railway and different rail concepts will be analyzed: superstructure, infrastructure, rail buildings, rail rolling material (considering its components and the most important working principles). In addition, the rail axle concept and its implications will be studied in depth.

Furthermore, different studies about a certain rail axle will be developed (analysis of tensions and distortions, fatigue and cracked axle analysis) through analytical techniques and the finite element method (FEM). Finally the dimensionless analysis of the axle will be expounded with the aim of establishing the methodology to interpret the results obtained in a test bench.

Therefore, the purpose of this project is trying to provide answers to the previous questions.

Índice general

AGRADECIMIENTOS.....	I
RESUMEN.....	V
ABSTRACT.....	VII
1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS.....	1
1.1 INTRODUCCIÓN.....	1
1.2 OBJETIVOS.	5
1.3 ESTRUCTURA DEL DOCUMENTO.	6
2. CONCEPTOS FERROVIARIOS.	11
2.1 BREVE HISTORIA DEL FERROCARRIL.	11
2.1.1 <i>El ferrocarril como elemento básico en el desarrollo de la sociedad hasta la actualidad.</i>	11
2.1.2 <i>El ferrocarril en España.</i>	18
2.1.3 <i>La Maquinista Marítima y Terrestre (MTM).</i>	20
2.2 INFRAESTRUCTURA	22
2.2.1 <i>Introducción.</i>	22
2.2.2 <i>Obras de fábrica.</i>	22
2.2.3 <i>Trazado.</i>	24
2.3 SUPERESTRUCTURA.....	26
2.3.1 <i>Introducción.</i>	26
2.3.2 <i>La vía.</i>	26
2.3.2.1 <i>La plataforma.</i>	27
2.3.2.2 <i>Las capas de asiento.</i>	28
2.3.2.3 <i>El carril.</i>	31
2.3.2.4 <i>Las traviesas.</i>	32
2.3.2.5 <i>Sujeción de las traviesas.</i>	33
2.3.3 <i>Aparatos de la vía.</i>	33
2.3.4 <i>Cambios de agujas.</i>	35

2.3.5 Señales.....	36
2.3.6 Electrificación.....	38
2.4 ENCLAVES FERROVIARIOS	41
2.4.1 Introducción.....	41
2.4.2 Estación.....	41
2.4.3 Apartadero.....	41
2.4.4 Apeadero.....	42
2.4.5 Cargadero.....	42
2.4.6 Terminales de mercancías.....	43
3. MATERIAL RODANTE FERROVIARIO.....	45
3.1 INTRODUCCIÓN.....	45
3.2 COCHES.....	47
3.3 BOGIES.....	48
3.3.1 Introducción.....	48
3.3.2 Historia, evolución y tipos de bogie.....	49
3.3.3 Diseños habituales del bogie en un vehículo de pasajeros.....	51
3.3.4 Tracción concentrada y distribuida.....	51
3.4 EJES.....	52
3.5 CAJAS DE GRASA	53
3.6 PLACAS DE GUARDA	56
3.7 ELEMENTOS DE SUSPENSIÓN.....	56
3.7.1 Introducción.....	56
3.7.2 Componentes de la suspensión.....	57
3.7.2.1 Ballestas.....	58
3.7.2.2 Resortes helicoidales.....	60
3.7.2.3 Barras de torsión.....	61
3.7.2.4 Resortes de elastómeros.....	62
3.7.2.5 Suspensión neumática.....	63
3.7.2.6 Amortiguadores.....	64
3.7.3 Tipos de suspensión.....	66
3.7.3.1 Suspensión primaria.....	66
3.7.3.2 Suspensión secundaria.....	67
3.8 RUEDAS.....	68
3.8.1 Introducción.....	68
3.8.2 Partes de la rueda ferroviaria.....	69
3.8.3 Tipos de ruedas ferroviarias.....	70
3.9 MOTORES DE TRACCIÓN	71
3.10 EQUIPO DE FRENO	72
4. EJES FERROVIARIOS.....	75
4.1 INTRODUCCIÓN.....	75
4.2 EJES DE UN VEHÍCULO	76
4.2.1 Introducción.....	76
4.2.2 Características estructurales.....	76
4.2.3 Tipos de ejes.....	77
4.2.3.1 Eje motriz.....	77
4.2.3.2 Eje libre.....	77
4.3 EJES DE FERROCARRIL.....	77
4.3.1 Definiciones	77

4.3.2 Funciones principales del órgano de rodadura, ejes y bogies	78
4.3.3 Ejes montados	79
4.3.4 Instalación de los ejes en el bogie	84
4.4 FERROCARRIL DE ALTA VELOCIDAD: EL EJE HUECO.	84
 5. CONCEPTOS COMPLEMENTARIOS DE MECÁNICA.	87
5.1 INTRODUCCIÓN A LA RESISTENCIA DE MATERIALES.	87
5.2 RESISTENCIA DE ELEMENTOS MECÁNICOS BAJO CARGAS ESTÁTICAS.....	88
5.3 RESISTENCIA DE ELEMENTOS MECÁNICOS BAJO CARGAS DINÁMICAS: FENÓMENOS DE FATIGA....	90
5.3.1 Introducción.....	90
5.3.2 Características de la rotura por fatiga.....	90
5.3.3 Diagrama de fatiga (S-N). Resistencia a la fatiga y límite de fatiga.	93
5.3.4 Factores modificativos del límite a fatiga.	94
5.3.4.1 Factor de acabado superficial (K_a).....	94
5.3.4.2 Factor de tamaño (K_b).....	96
5.3.4.3 Factor de confiabilidad (K_c).....	97
5.3.4.4 Factor de temperatura (K_d).....	98
5.3.4.5 Factor de concentración de tensiones (K_e).....	98
5.3.4.6 Factor de efectos diversos (K_f).	104
5.3.5 Tensiones fluctuantes.	105
5.3.5.1 Criterio de Goodman.	109
5.3.5.2 Criterio de Soderberg.....	109
5.3.5.3 Criterio de Gerber.	110
5.3.5.4 Comparación de criterios.....	110
5.3.6 Límite de fatiga bajo tensiones fluctuantes.....	111
5.3.7 Línea de carga.....	113
5.4 RESISTENCIA MECÁNICA DE EJES	115
5.4.1 Introducción.....	115
5.4.2 Cálculo de un eje para resistencia estática.....	115
5.4.3 Cálculo de un eje para resistencia a cargas alternantes (fatiga).	117
5.4.3.1 Teoría básica o de Sines.....	117
5.4.3.2 Teoría de Soderberg.	117
5.4.3.3 Teoría de Goodman.	120
5.4.3.4 Resumen de teorías principales para el cálculo de ejes a fatiga.	121
5.5 COMPORTAMIENTO DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS ANTE LA PRESENCIA DE FISURAS.....	121
5.5.1 Planteamiento del problema elástico plano.....	121
5.5.2 Modos de deformación de un sólido fisurado.	122
5.5.3 Hipótesis y solución del problema elástico-plano.....	123
5.5.4 Análisis de la solución del problema elástico-plano.	124
5.5.5 Relación de la solución del problema elástico-plano con el MEF.	125
5.6 APLICACIÓN DE LA MECÁNICA DE LA FRACTURA LINEAL Y ELÁSTICA (MFLE) MEDIANTE EL MEF.	125
5.6.1 Introducción.....	125
5.6.2 Método del balance de energía o extensión virtual de la fisura.....	126
 6. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.	129
6.1 INTRODUCCIÓN.....	129
6.2 HISTORIA DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.	130

6.3 FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS A TRAVÉS DE ELEMENTOS FINITOS.	132
6.3.1 <i>El modelo de elementos finitos.</i>	132
6.3.2 <i>Los grados de libertad.</i>	133
6.4 PRINCIPIOS GENERALES APLICADOS A UN CONTINUO ELÁSTICO.	134
6.4.1 <i>Ecuaciones de equilibrio. Principio de los trabajos virtuales (PTV).</i>	134
6.4.2 <i>Funciones de interpolación.</i>	136
6.4.3 <i>Síntesis de las características globales.</i>	137
6.4.4 <i>Imposición de condiciones de contorno. Solución.</i>	138
6.5 TIPOS DE ELEMENTOS FINITOS.	138
6.5.1 <i>Elemento barra.</i>	138
6.5.2 <i>Elemento viga.</i>	139
6.5.3 <i>Elementos planos triangular y cuadrilátero.</i>	139
6.5.4 <i>Elemento plano rectangular.</i>	140
6.5.5 <i>Elementos tetraédricos.</i>	141
6.5.6 <i>Elementos hexaédricos.</i>	141
6.5.7 <i>Elementos con bordes curvos.</i>	142
6.5.8 <i>Elementos axilsimétricos.</i>	142
6.6 ANSYS, UN PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS.	143
 7. METODOLOGÍA.	 147
7.1 INTRODUCCIÓN.	147
7.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y DATOS DE PARTIDA.	148
7.3 METODOLOGÍA PARA LA GENERACIÓN DEL MODELO DE ELEMENTOS FINITOS.	150
7.4 METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS DE TENSIONES Y DESPLAZAMIENTOS EN EL EJE FERROVIARIO.	150
7.5 METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS MODAL DEL EJE FERROVIARIO.	152
7.6 METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS A FATIGA DEL EJE FERROVIARIO.	153
7.7 METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS A FATIGA DEL EJE FERROVIARIO FISURADO.	154
7.8 METODOLOGÍA PARA LA APLICACIÓN DEL MEF AL ANÁLISIS ADIMENSIONAL DE EJES FERROVIARIOS.	155
 8. ESTUDIO DE TENSIONES Y DESPLAZAMIENTOS EN EL CONJUNTO EJE-RAÍL-RUEDA DE UN FERROCARRIL.	 159
8.1 INTRODUCCIÓN.	159
8.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DEL CONJUNTO EJE-RAÍL-RUEDA.	161
8.2.1 <i>Introducción.</i>	161
8.2.2 <i>Generación de la geometría del modelo utilizando Solid Edge.</i>	162
8.2.3 <i>Análisis por elementos finitos mediante ANSYS.</i>	163
8.2.3.1 <i>Preprocesado.</i>	163
8.2.3.2 <i>Solución.</i>	167
8.2.3.3 <i>Postprocesado.</i>	169
8.3 ANÁLISIS DE RESULTADOS.	169
8.3.1 <i>Análisis de deformaciones y desplazamientos.</i>	169
8.3.1.1 <i>Análisis de desplazamientos en la rueda.</i>	170
8.3.1.2 <i>Análisis de desplazamientos en el raíl.</i>	172
8.3.1.3 <i>Análisis de desplazamientos en el eje.</i>	174
8.3.2 <i>Análisis de tensiones.</i>	176
8.3.2.1 <i>Análisis de tensiones en la rueda.</i>	176
8.3.2.2 <i>Análisis de tensiones en el raíl.</i>	177

8.3.2.3 Análisis de tensiones en el eje.	178
8.4 RESUMEN DE RESULTADOS.	179
8.5 CONCLUSIONES DEL ANÁLISIS.	181
8.6 ANÁLISIS MODAL DEL EJE FERROVIARIO.	182
9. ESTUDIO A FATIGA DE UN EJE FERROVIARIO.....	189
9.1 ESTUDIO A ANALÍTICO DE UN EJE A FATIGA.....	189
9.1.1 Obtención de los esfuerzos en el eje.....	189
9.1.2 Análisis de las secciones críticas.	191
9.2 ESTUDIO DEL EJE A FATIGA MEDIANTE ANSYS.....	195
9.2.1 Determinación del tipo de análisis.	196
9.2.2 Aplicación de las cargas.....	198
9.2.3 Resolución del sistema y estudio a fatiga.....	198
9.3 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD.	202
9.4 CONCLUSIONES DEL ANÁLISIS.	204
10. ESTUDIO DE UN EJE FISURADO MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.	207
10.1 DETERMINACIÓN DEL FIT COMBINANDO EL MÉTODO DEL BALANCE DE ENERGÍAS Y EL MEF EN UN EJE FERROVIARIO.	207
10.1.1 Introducción.....	207
10.1.2 Hipótesis consideradas.	209
10.1.3 Cálculo del FIT.....	209
10.2 CÁLCULO ANALÍTICO DEL FIT MEDIANTE LA MFLE.....	216
10.3 CONCLUSIONES DEL ANÁLISIS.	219
11. APLICACIÓN DEL MEF AL ANÁLISIS ADIMENSIONAL PARA LA INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS DE UN BANCO DE ENSAYOS DE EJES A ESCALA.	221
11.1 INTRODUCCIÓN.....	221
11.2 ANÁLISIS ADIMENSIONAL MODAL.....	222
11.2.1 Introducción.....	222
11.2.2 Análisis adimensional modal de un cilindro libre en el espacio.....	223
11.2.3 Análisis adimensional modal de un cilindro empotrado en un lado.....	229
11.2.4 Análisis adimensional modal de un cilindro biempotrado.....	235
11.2.5 Estudio energético de los modos propios de vibración.....	242
11.2.6 Relación entre modos propios de vibración de acero y aluminio.	246
11.2.7 Relación entre modos propios de vibración de acero y hierro colado.	248
11.2.8 Conclusiones del análisis.....	251
11.3 ANÁLISIS ADIMENSIONAL DE FUERZAS Y TENSIONES SOBRE CILINDROS.	252
11.3.1 Introducción.....	252
11.3.2 Cilindro empotrado como ménsula.	252
11.3.2.1 Análisis adimensional de fuerzas.....	252
11.3.2.2 Análisis adimensional de tensiones.	254
11.3.2.3 Análisis adimensional de fuerzas y tensiones variando el material.....	255
11.3.2.4 Comprobación del análisis adimensional mediante la aplicación del MEF.	257
11.3.3 Cilindro biempotrado.....	258
11.3.3.1 Análisis adimensional de fuerzas.....	258
11.3.3.2 Análisis adimensional de tensiones.	260
11.3.3.3 Análisis adimensional de fuerzas y tensiones variando el material.....	261

11.3.3.4 Comprobación del análisis adimensional mediante la aplicación del MEF.	261
11.3.4 Influencia del coeficiente de Poisson sobre el análisis adimensional.	263
11.3.5 Conclusiones del análisis adimensional de tensiones y desplazamientos en cilindros.	264
11.4 ANÁLISIS ADIMENSIONAL DE EJE FERROVIARIO.	264
11.4.1 Introducción.	264
11.4.2 Planteamiento del problema.	265
11.4.3 Análisis adimensional del conjunto eje-raíl-rueda escalado 1:5 mediante la aplicación del MEF.	268
11.4.4 Análisis adimensional del conjunto eje-raíl-rueda escalado 1:4 mediante la aplicación del MEF.	272
11.4.5 Análisis adimensional modal del eje ferroviario.	275
11.4.6 Conclusiones del análisis adimensional de tensiones, desplazamientos y modos propios de vibración sobre el eje ferroviario.	277
12. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.	279
12.1 CONCLUSIONES.	279
12.2 TRABAJOS FUTUROS.	281
13. BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS.....	285
14. PRESUPUESTO.....	291
14.1 GASTOS DE PERSONAL.	291
14.2 GASTOS EN LICENCIAS Y EQUIPOS DE INFORMÁTICA.	292
14.3 GASTOS ADICIONALES.	293
14.4 PRESUPUESTO FINAL.	293
ANEXO A. APLICACIONES Y MODELOS MATEMÁTICOS DE INTERÉS EN EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.	295
A.1 FLEXIÓN DE VIGAS ESBELTAS. TEORÍA DE EULER-BERNOULLI	295
A.1.1 Teoría básica	295
A.1.2 Discretización en elementos finitos de dos nodos.	298
A.2 FLEXIÓN DE VIGAS DE TIMOSHENKO	301
A.2.1 Teoría básica	301
A.2.2 Elementos finitos para la flexión de vigas de Timoshenko.	304
A.2.3 Elemento de viga de Timoshenko cuadrático.	307
A.3 TEORÍA BÁSICA DE SÓLIDOS TRIDIMENSIONALES.....	309
A.3.1 Campo de desplazamientos.	309
A.3.2 Campo de deformaciones.	310
A.3.3 Campo de tensiones.	310
A.3.4 Relación tensión-deformación.	311
A.3.5 Expresión del principio de los trabajos virtuales.	312
A.3.6 Formulación de elementos finitos. Particularización para el elemento tetraédrico de cuatro nodos.	312
A.3.6.1 Discretización del campo de desplazamientos.	312
A.3.6.2 Matriz de deformación.	314
A.3.6.3 Matriz de rigidez del elemento.	315
A.3.6.4 Vector de fuerzas nodales equivalentes.	316
A.4 TEORÍA DE PLACAS DE KIRCHHOFF.	319

A.4.1 Estado de placa.	319
A.4.2 Hipótesis fundamentales.	319
A.4.3 Campo de desplazamientos.	320
A.4.4 Campo de deformaciones, tensiones y esfuerzos.	321
A.4.5 Expresión del principio de los trabajos virtuales.	324
A.4.6 Ecuaciones de equilibrio de la placa.	324
A.4.7 Formulación de elementos finitos.	326
A.5 TEORÍA DE PLACAS DE REISSNER-MINDLIN.	327
A.5.1 Hipótesis fundamentales.	327
A.5.2 Campo de desplazamientos.	327
A.5.3 Campo de deformaciones y tensiones.	329
A.5.4 Relación tensión-deformación.	330
A.5.5 Esfuerzos y deformaciones generalizadas.	331
A.5.6 Principio de los trabajos virtuales.	333
A.5.7 Formulación de elementos finitos.	334
A.5.7.1 Discretización del campo de movimientos.	334
A.5.7.2 Discretización del campo de deformaciones generalizadas.	335
A.5.7.3 Obtención de la matriz de rigidez del elemento.	335
A.5.7.4 Otros vectores de fuerzas nodales equivalentes.	337
A.6 ANÁLISIS MODAL: MÉTODO DE LANCZOS.	337
A.6.1 Conceptos previos. El método de Arnoldi.	337
A.6.2 Método de Lanczos.	339
A.6.3 Método de Lanczos para sistemas simétricos.	340
 ANEXO B. DEFORMADAS DE LOS MODOS PROPIOS DE VIBRACIÓN DEL EJE ANALIZADO EN EL PRESENTE PROYECTO.	 343

Índice de figuras

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS.....	1
<i>Figura 1. Descripción del accidente de Viareggio 2009.....</i>	<i>2</i>
<i>Figura 2. Zona de fractura del eje del accidente de Viareggio 2009. Sección correspondiente a la zona de calaje de la rueda.</i>	<i>2</i>
<i>Figura 3. Zona de fractura del eje del accidente de Viareggio 2009. Sección correspondiente a la zona de apoyo de la caja de grasa.</i>	<i>3</i>
<i>Figura 4. Incendio consecuencia de la explosión del GLP que transportaba el tren accidente de Viareggio 2009.</i>	<i>3</i>
<i>Figura 5. Bomberos trabajando para sofocar el incendio consecuencia de la explosión del GLP que transportaba el tren accidente de Viareggio 2009.</i>	<i>4</i>
2. CONCEPTOS FERROVIARIOS.....	11
<i>Figura 6. El inicio del ferrocarril: vagonetas de mercancías.</i>	<i>12</i>
<i>Figura 7. George y Robert Stephenson.</i>	<i>13</i>
<i>Figura 8. Locomotora 140-2054, conocida como “La Baldwin” por sus fabricantes Babcock&Wilcox, del tren de la fresa que realiza en recorrido turístico Madrid-Aranjuez.</i>	<i>15</i>
<i>Figura 9. Locomotora eléctrica del Talgo Alta Velocidad con cambio automático de ancho de vía, serie130, en servicio.</i>	<i>16</i>
<i>Figura 10. Locomotora diésel 352 “Virgen del Rosario”.</i>	<i>16</i>
<i>Figura 11. Locomotora con turbina de gas.</i>	<i>17</i>
<i>Figura 12. Locomotora-ténder 2-6-2 de la Compañía del Ferrocarril de Olot a Girona. Fabricada por la Maquinista Marítima Terrestre. 1926. Archivo Nacional de Cataluña.</i>	<i>21</i>
<i>Figura 13. Locomotora 2-4-0 serie 2400 fabricada en los talleres de MTM en 1940. Conocida popularmente como la “Linda tapada”. Archivo Nacional de Cataluña.</i>	<i>21</i>
<i>Figura 14. Viaducto ferroviario.</i>	<i>22</i>
<i>Figura 15. Puente ferroviario.</i>	<i>22</i>
<i>Figura 16. Paso a distinto nivel.</i>	<i>23</i>
<i>Figura 17. Paso a nivel.</i>	<i>23</i>

<i>Figura 18. Túnel ferroviario.</i>	24
<i>Figura 19. Clotoide.</i>	24
<i>Figura 20. Ejemplo de determinación del perfil longitudinal de un trazado ferroviario.</i>	25
<i>Figura 21. Tipos de explanaciones.</i>	26
<i>Figura 22. Elementos de una vía.</i>	27
<i>Figura 23. Tipos de plataforma: Trinchera o desmonte (1), a nivel (2), a media ladera (3) y terraplén (4).</i>	28
<i>Figura 24. Capas de asiento.</i>	28
<i>Figura 25. Vía sin balasto o vía en placa (VSB).</i>	31
<i>Figura 26. Esquema del carril.</i>	31
<i>Figura 27. Traviesas de hormigón bloque (superior) y monobloque (inferior).</i>	32
<i>Figura 28. Sujeción de traviesas bloque.</i>	33
<i>Figura 29. Sujeción de traviesas monobloque polivalentes.</i>	33
<i>Figura 30. Aparatos de la vía: Corazón y espadín.</i>	34
<i>Figura 31. Desvío (izq.) y desvío mixto (dcha.).</i>	34
<i>Figura 32. Travesía.</i>	34
<i>Figura 33. Combinación de aparatos de vía.</i>	34
<i>Figura 34. Cambio de agujas eléctrico.</i>	35
<i>Figura 35. Cambio de agujas mecánico.</i>	35
<i>Figura 36. Cambio de agujas manual.</i>	35
<i>Figura 37. Señal semafórica.</i>	36
<i>Figura 38. Señal luminosa.</i>	36
<i>Figura 39. Jefe de estación con señal portátil.</i>	37
<i>Figura 40. Señales de los trenes.</i>	37
<i>Figura 41. Señales de limitación de velocidad.</i>	37
<i>Figura 42. Feeder para el transporte de corriente (izq.) y Feeder paralelo a la línea de contacto (dcha.).</i>	38
<i>Figura 43. Conjunto de soporte y conjunto de atirantado.</i>	39
<i>Figura 44. Conjunto de suspensión.</i>	40
<i>Figura 45. Conjunto de compensación.</i>	40
<i>Figura 46. Estación de Atocha, en Madrid.</i>	41
<i>Figura 47. Apartadero de Oropesa del mar (Castellón).</i>	42
<i>Figura 48. Apeadero.</i>	42
<i>Figura 49. Cargadero de carbón.</i>	43
<i>Figura 50. Terminal de mercancías.</i>	43
3. MATERIAL RODANTE FERROVIARIO.	45
<i>Figura 51. Material motor: material tractor (izq.), vehículo automotor (centro) y material auxiliar (dcha.).</i>	46
<i>Figura 52. Material remolcado: coche (izq.), vagón (centro) y furgón (dcha.).</i>	46
<i>Figura 53. Material rígido o sin bogies (izq.) y material articulado o montado sobre bogies (dcha.).</i>	47
<i>Figura 54. Acople de tope y cadena (izq.) y acople de eslabón y perno (dcha.).</i>	47
<i>Figura 55. Acoples automáticos de Scharfenberg (izq.) y Janney (dcha.).</i>	47
<i>Figura 56. Bogie motor.</i>	48
<i>Figura 57. Bogie remolcado.</i>	48
<i>Figura 58. Movimiento de lazo.</i>	50

<i>Figura 59. Partes de un eje ferroviario.</i>	52
<i>Figura 60. Eje montado.</i>	52
<i>Figura 61. Caja de grasa.</i>	53
<i>Figura 62. Caja de grasa con rodamientos planos.</i>	54
<i>Figura 63. Rodamientos de rodillos (a) cilíndricos y (b y c) cónicos.</i>	55
<i>Figura 64. Uso de rodamientos de bolas: (a) rodamientos triples de trenes de alta velocidad en Japón y (b) rodamientos triples de trenes de alta velocidad en Francia</i>	55
<i>Figura 65. Placas de guarda.</i>	56
<i>Figura 66. Ballesta.</i>	58
<i>Figura 67. Ballesta integrada en el sistema de suspensión de un vehículo ferroviario.</i>	59
<i>Figura 68. Resortes en un bogie Y25.</i>	60
<i>Figura 69. Resortes concéntricos en paralelo.</i>	60
<i>Figura 70. Resortes helicoidales de fleje.</i>	61
<i>Figura 71. Brazo de torsión.</i>	61
<i>Figura 72. Muelle de elastómero para soportar cajas de grasa.</i>	62
<i>Figura 73. Suspensión neumática en un vehículo ferroviario.</i>	64
<i>Figura 74. Amortiguador de fricción.</i>	65
<i>Figura 75. Amortiguador hidráulico de doble tubo (izq.) y monotubo (dcha.).</i>	66
<i>Figura 76. Montajes de suspensión primaria.</i>	67
<i>Figura 77. Suspensión primaria y secundaria.</i>	68
<i>Figura 78. Principales parámetros dimensionales de una rueda.</i>	69
<i>Figura 79. Tipos de ruedas: (a) enterizas, (b) de llanta y (c) ensambladas.</i>	70
<i>Figura 80. Rueda Wheelset Spring.</i>	71
<i>Figura 81. Motor montado en bogie.</i>	71
<i>Figura 82. Equipo de freno montado en bogie.</i>	72
<i>Figura 83. Zapatas de fricción.</i>	72
4. EJES FERROVIARIOS.	75
<i>Figura 84. Árboles de levas.</i>	75
<i>Figura 85. Eje de ferrocarril.</i>	78
<i>Figura 86. Principales tipos de diseños de eje montado: (a) con rodamientos externos e internos; (b) con discos de freno en el eje y en la rueda; (c) con posición asimétrica y simétrica de engranajes (1, eje; 2, rueda; 3, rodamiento; 4, disco de freno; 5, engranaje de dientes).</i>	80
<i>Figura 87. Principales componentes del perfil de rodadura.</i>	81
<i>Figura 88. Perfiles comunes de ruedas: (a) para coches de pasajeros y mercancías (Rusia); (b) para coches de alta velocidad (Rusia); (c) para material rodante industrial (Rusia); (d) para coches de pasajeros y mercancías en Europa; (e, f) para trenes de alta velocidad (Japón).</i>	82
<i>Figura 89. Desgaste de la banda de rodadura y pestaña.</i>	83
<i>Figura 90. Posibles situaciones de contacto entre la rueda y el carril: (a) contacto en un único punto; (b) contacto en dos puntos; (c) contacto toda la superficie.</i>	83
5. CONCEPTOS COMPLEMENTARIOS DE MECÁNICA.	87
<i>Figura 91. Diagramas tensión-deformación de materiales dúctiles y frágiles.</i>	89
<i>Figura 92. Zonas de fallo por fatiga en el eje del accidente de Viareggio 2009.</i>	90

<i>Figura 93. Propagación de una fisura en un eje de transmisión I.</i>	92
<i>Figura 94. Propagación de una fisura en un eje de transmisión II.</i>	92
<i>Figura 95. Curva de Woehler.</i>	93
<i>Figura 96. Variación del factor de acabado superficial con la resistencia última del material.</i>	95
<i>Figura 97. Sensibilidad a las ranuras. Cargas de flexión y axiales alternantes. Para radios de ranura mayores usar valores de q correspondientes a $r = 4 \text{ mm}$.</i>	99
<i>Figura 98. Sensibilidad a las ranuras. Cargas de torsión alternantes. Para radios de ranura mayores usar valores de q correspondientes a $r = 4 \text{ mm}$.</i>	100
<i>Figura 99. Barra de sección rectangular en tensión o compresión simples con un agujero transversal.</i>	100
<i>Figura 100. Barra de sección rectangular en flexión simple con un agujero transversal.</i>	100
<i>Figura 101. Barra de sección rectangular en tensión o compresión simples con dos muescas o recortes circulares.</i>	101
<i>Figura 102. Barra de sección rectangular en flexión con dos muescas o recortes circulares.</i>	101
<i>Figura 103. Barra de sección rectangular en tensión o compresión simples con estrechamiento y entalles.</i>	101
<i>Figura 104. Barra de sección rectangular en flexión con estrechamiento y entalles.</i>	102
<i>Figura 105. Barra de sección circular en tracción con estrechamiento y entalles.</i>	102
<i>Figura 106. Barra de sección circular en torsión con estrechamiento y entalles.</i>	102
<i>Figura 107. Barra de sección circular en flexión con estrechamiento y entalles.</i>	103
<i>Figura 108. Barra de sección circular en torsión con un agujero transversal.</i>	103
<i>Figura 109. Barra de sección circular en flexión con un agujero transversal.</i>	103
<i>Figura 110. Placa cargada en tensión con un pasador en agujero transversal.</i>	104
<i>Figura 111. Factor de concentración de tensiones para chaveteros.</i>	104
<i>Figura 112. Límite a fatiga en la unión del núcleo central y capa superficial de una pieza templada.</i>	105
<i>Figura 113. Esfuerzo alternante.</i>	106
<i>Figura 114. Tensión pulsante.</i>	106
<i>Figura 115. Tensión fluctuante.</i>	106
<i>Figura 116. Esfuerzo fluctuante.</i>	106
<i>Figura 117. Tensión total en función de la tensión media.</i>	108
<i>Figura 118. Tensión alternante en función de la tensión media.</i>	108
<i>Figura 119. Comparación de criterios de fallo a fatiga para un determinado número de ciclos.</i>	110
<i>Figura 120. Diagrama de fatiga S-N según Goodman.</i>	113
<i>Figura 121. Línea de carga en el diagrama de Goodman para vida infinita.</i>	114
<i>Figura 122. Corte mediante plano PQ de un elemento de esfuerzo de espesor unitario.</i>	118
<i>Figura 123. Esfuerzo cortante medio frente a esfuerzo cortante alternante.</i>	118
<i>Figura 124. Continuo elástico genérico fisurado.</i>	122
<i>Figura 125. Modos de deformación de un sólido fisurado.</i>	123
<i>Figura 126. Sistema de coordenadas para la solución de un problema aplicando la MFLE.</i>	123

6. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.....	129
<i>Figura 127. ANSYS, un programa de elementos finitos.</i>	<i>131</i>
<i>Figura 128. Ejemplo de modelo sólido y modelo de elementos finitos.</i>	<i>133</i>
<i>Figura 129. Viga en voladizo.</i>	<i>133</i>
<i>Figura 130. Discretizado de viga en voladizo.</i>	<i>133</i>
<i>Figura 131. Grados de libertad estructurales.</i>	<i>134</i>
<i>Figura 132. Continuo elástico genérico.</i>	<i>134</i>
<i>Figura 133. Elemento barra tridimensional.</i>	<i>139</i>
<i>Figura 134. Elemento viga tridimensional.</i>	<i>139</i>
<i>Figura 135. Elemento plano triangular (a) y cuadrilátero (b).</i>	<i>140</i>
<i>Figura 136. Combinación de elementos triangulares y cuadriláteros.</i>	<i>140</i>
<i>Figura 137. Elemento plano rectangular.</i>	<i>141</i>
<i>Figura 138. Tetraedro de cuatro (a) y de diez (b) nodos.</i>	<i>141</i>
<i>Figura 139. Elemento hexaédrico.</i>	<i>141</i>
<i>Figura 140. Elementos con bordes curvos.</i>	<i>142</i>
<i>Figura 141. a) Cilindro bajo presión externa. b) Modelo axilsimétrico.</i>	<i>142</i>
<i>Figura 142. Análisis fluido mecánico mediante ANSYS CFD.</i>	<i>143</i>
<i>Figura 143. Análisis de álabes de turbinas mediante ANSYS.</i>	<i>145</i>
 7. METODOLOGÍA.	 147
<i>Figura 144. Entrada en resonancia del puente de Tacoma Narrows.</i>	<i>152</i>
<i>Figura 145. Banco ensayos de ejes ferroviarios a escala 1:8.</i>	<i>155</i>
<i>Figura 146. Equipo de adquisición de datos para el banco ensayos de ejes ferroviarios a escala 1:8.</i>	<i>156</i>
<i>Figura 147. Banco ensayos de ejes ferroviarios a escala 1:5 con cilindros simulando las ruedas.</i>	<i>156</i>
 8. ESTUDIO DE TENSIONES Y DESPLAZAMIENTOS EN EL CONJUNTO EJE-RAÍL-RUEDA DE UN FERROCARRIL.	 159
<i>Figura 148. Infraestructura ferroviaria.</i>	<i>160</i>
<i>Figura 149. Conjunto eje-rueda-raíl objeto de análisis.</i>	<i>161</i>
<i>Figura 150. Eje de interés en el análisis.</i>	<i>161</i>
<i>Figura 151. Rueda construida en Solid Edge.</i>	<i>162</i>
<i>Figura 152. Eje construido en Solid Edge.</i>	<i>162</i>
<i>Figura 153. Raíl UIC60 construido en Solid Edge.</i>	<i>162</i>
<i>Figura 154. Conjunto eje-raíles-ruedas construido en Solid Edge.</i>	<i>163</i>
<i>Figura 155. Selección del tipo de análisis.</i>	<i>164</i>
<i>Figura 156. Elemento SOLID45.</i>	<i>165</i>
<i>Figura 157. Selección de las características del material en ANSYS.</i>	<i>165</i>
<i>Figura 158. Geometría del modelo exportado a ANSYS.</i>	<i>166</i>
<i>Figura 159. Modelo a analizar mallado.</i>	<i>166</i>
<i>Figura 160. Conjunto eje-raíles-ruedas con cargas a aplicar.</i>	<i>167</i>
<i>Figura 161. Modelo cargado.</i>	<i>168</i>
<i>Figura 162. Cuadro de diálogo para la obtención de los resultados gráficos.</i>	<i>169</i>
<i>Figura 163. Deformada (escala 180:1) del conjunto objeto de estudio.</i>	<i>170</i>

<i>Figura 164. Vector desplazamiento sobre la rueda en la cara exterior (izq.) e interior (dcha.).</i>	170
<i>Figura 165. Desplazamientos en eje horizontal de la rueda en la cara exterior (izq.) e interior (dcha.).</i>	171
<i>Figura 166. Desplazamientos en eje vertical de la rueda en la cara exterior (izq.) e interior (dcha.).</i>	171
<i>Figura 167. Desplazamientos en profundidad de la rueda en la cara exterior (izq.) e interior (dcha.).</i>	171
<i>Figura 168. Vector desplazamiento sobre el raíl.</i>	172
<i>Figura 169. Desplazamientos en eje horizontal del raíl.</i>	173
<i>Figura 170. Desplazamientos en el eje vertical del raíl en la cara exterior (izq.) e interior (dcha.).</i>	173
<i>Figura 171. Desplazamientos en profundidad del raíl.</i>	174
<i>Figura 172. Vector desplazamiento del eje.</i>	174
<i>Figura 173. Desplazamientos en eje horizontal del eje.</i>	175
<i>Figura 174. Desplazamientos en profundidad del eje.</i>	175
<i>Figura 175. Desplazamientos en el eje vertical del eje.</i>	176
<i>Figura 176. Distribución de tensiones en la rueda.</i>	176
<i>Figura 177. Distribución tensional en la rueda en la zona de apoyo de la rueda sobre el raíl.</i>	177
<i>Figura 178. Distribución tensional en el raíl.</i>	177
<i>Figura 179. Distribución tensional en el raíl en la zona de apoyo de la rueda sobre el raíl.</i>	178
<i>Figura 180. Distribución tensional sobre el eje.</i>	178
<i>Figura 181. Distribución de tensiones en el conjunto en la cara exterior (izq.) e interior (dcha.).</i>	180
<i>Figura 182. Vector desplazamientos en el conjunto en la cara exterior (izq.) e interior (dcha.).</i>	180
<i>Figura 183. Desplazamientos en eje vertical en el conjunto en la cara exterior (izq.) e interior (dcha.).</i>	180
<i>Figura 184. Desplazamientos en eje horizontal en el conjunto en la cara exterior (izq.) e interior (dcha.).</i>	181
<i>Figura 185. Desplazamientos en profundidad en el conjunto en la cara exterior (izq.) e interior (dcha.).</i>	181
9. ESTUDIO A FATIGA DE UN EJE FERROVIARIO.	189
<i>Figura 186. Esfuerzos sobre el eje ferroviario.</i>	190
<i>Figura 187. Sección de paso de la zona de apoyo de la caja de grasa a la zona de calaje de un eje ferroviario.</i>	190
<i>Figura 188. Coeficiente de concentración de esfuerzos en función de D/d y r/d en la transición inferior entre dos partes cilíndricas (Fuente: norma UNE-EN 13103:2010+A1).</i>	192
<i>Figura 189. Coeficiente de concentración de esfuerzos en función de D/d y r/d en el fondo de la acanaladura (Fuente: norma UNE-EN 13103:2010+A1).</i>	193
<i>Figura 190. Módulo que permite llevar a cabo estudios a fatiga.</i>	195
<i>Figura 191. Selección de análisis tipo "transient".</i>	196
<i>Figura 192. Pantalla "Solution controls, basic tab".</i>	196

Figura 193. Pantalla “Solution controls, transient tab”.....	197
Figura 194. Cuadro “Load Step options, Write LS File”.....	198
Figura 195. Cuadro “Solve Load Step Files”.....	199
Figura 196. Cuadro “Fatigue S-N Table” con los puntos clave definidos.....	199
Figura 197. Determinación del nodo para analizar a fatiga.....	200
Figura 198. Registro del primer estado de carga para el análisis a fatiga.....	200
Figura 199. Registro del segundo estado de carga para el análisis a fatiga.....	201
Figura 200. Selección del número de ciclos a aplicar.....	201
Figura 201. Resultado del análisis a fatiga.....	201
Figura 202. Análisis a fatiga mediante la aplicación del MEF.....	203
Figura 203. Resultado del análisis a fatiga.....	204

10. ESTUDIO DE UN EJE FISURADO MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

.....	207
Figura 204. Geometría transversal de la fisura.....	208
Figura 205. Situación de la fisura modelizada en el eje ferroviario de interés.....	208
Figura 206. Geometría de la fisura de longitud $a=3\text{mm}$ (Líneas).....	209
Figura 207. Geometría de la fisura de longitud $a=3\text{mm}$ (Áreas).....	210
Figura 208. Mallado con SOLID95 de la fisura de longitud $a=3\text{mm}$	210
Figura 209. Geometría de la fisura de longitud $(a+\Delta a)=3.5\text{mm}$ (Líneas).....	211
Figura 210. Geometría de la fisura de longitud $(a+\Delta a)=3.5\text{mm}$ (Áreas).....	211
Figura 211. Mallado con SOLID95 de la fisura de longitud $(a+\Delta a)=3.5\text{mm}$	212
Figura 212. Elemento SOLID 95.....	212
Figura 213. Campo tensional en los bordes de la fisura de longitud $a=3\text{mm}$ bajo una carga de 25Tm.....	213
Figura 214. Campo tensional en los bordes de la fisura de longitud $(a+\Delta a)=3.5\text{mm}$ bajo una carga de 25Tm.....	213
Figura 215. Campo tensional en los bordes de la fisura de longitud $a=3\text{mm}$ bajo una carga de 320Tm.....	214
Figura 216. Campo tensional en los bordes de la fisura de longitud $(a+\Delta a)=3.5\text{mm}$ bajo una carga de 320Tm.....	214
Figura 217. FIT en función de la longitud de fisura (a).....	216
Figura 218. Campo tensional en dirección axial del eje sin fisurar bajo una carga de 25 tm.....	217
Figura 219. Campo tensional en dirección axial del eje sin fisurar bajo una carga de 320 tm.....	217
Figura 220. Campo tensional en dirección axial del eje sin fisurar bajo una carga de 25 tm.....	218

11. APLICACIÓN DEL MEF AL ANÁLISIS ADIMENSIONAL PARA LA INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS DE UN BANCO DE ENSAYOS DE EJES A ESCALA.

Figura 221. Cilindro libre en el espacio.....	223
Figura 222. Primeros 25 modos propios de vibración para diferentes escalas. Cilindro libre en el espacio (Acero).....	224

<i>Figura 223. Coeficiente adimensional de los primeros 25 modos propios de vibración de los modelos escalados respecto al modelo 1:1. Cilindro libre en el espacio (Acero).</i>	225
<i>Figura 224. Primeros 25 modos propios de vibración para diferentes escalas. Cilindro libre en el espacio (Aluminio).</i>	226
<i>Figura 225. Coeficiente adimensional de los primeros 25 modos propios de vibración de los modelos escalados respecto al modelo 1:1. Cilindro libre en el espacio (Aluminio).</i>	227
<i>Figura 226. Primeros 25 modos propios de vibración para diferentes escalas. Cilindro libre en el espacio (Hierro colado).</i>	228
<i>Figura 227. Coeficiente adimensional de los primeros 25 modos propios de vibración de los modelos escalados respecto al modelo 1:1. Cilindro libre en el espacio (Hierro colado).</i>	229
<i>Figura 228. Cilindro empotrado en un lado.</i>	230
<i>Figura 229. Primeros 25 modos propios de vibración para diferentes escalas. Cilindro empotrado en un lado (Acero).</i>	230
<i>Figura 230. Coeficiente adimensional de los primeros 25 modos propios de vibración de los modelos escalados respecto al modelo 1:1. Cilindro empotrado en un lado (Acero).</i>	231
<i>Figura 231. Primeros 25 modos propios de vibración para diferentes escalas. Cilindro empotrado en un lado (Aluminio).</i>	232
<i>Figura 232. Coeficiente adimensional de los primeros 25 modos propios de vibración de los modelos escalados respecto al modelo 1:1. Cilindro empotrado en un lado (Aluminio).</i>	233
<i>Figura 233. Primeros 25 modos propios de vibración para diferentes escalas. Cilindro empotrado en un lado (Hierro colado).</i>	234
<i>Figura 234. Coeficiente adimensional de los primeros 25 modos propios de vibración de los modelos escalados respecto al modelo 1:1. Cilindro empotrado en un lado (Hierro colado).</i>	235
<i>Figura 235. Cilindro biempotrado.</i>	236
<i>Figura 236. Primeros 25 modos propios de vibración para diferentes escalas. Cilindro biempotrado (Acero).</i>	236
<i>Figura 237. Coeficiente adimensional de los primeros 25 modos propios de vibración de los modelos escalados respecto al modelo 1:1. Cilindro biempotrado (Acero).</i>	237
<i>Figura 238. Primeros 25 modos propios de vibración para diferentes escalas. Cilindro biempotrado (Aluminio).</i>	238
<i>Figura 239. Coeficiente adimensional de los primeros 25 modos propios de vibración de los modelos escalados respecto al modelo 1:1. Cilindro biempotrado (Aluminio).</i>	239
<i>Figura 240. Primeros 25 modos propios de vibración para diferentes escalas. Cilindro biempotrado (Hierro colado).</i>	240
<i>Figura 241. Coeficiente adimensional de los primeros 25 modos propios de vibración de los modelos escalados respecto al modelo 1:1. Cilindro biempotrado (Hierro colado).</i>	241
<i>Figura 242. Análisis HARMONIC del cilindro empotrado aplicando una carga vertical hacia abajo de 1000N en el extremo sucesivamente entre 0 y 310Hz (Escala 1:1).</i>	242

<i>Figura 243. Desplazamientos en el extremo libre del cilindro empotrado en un lado tras la aplicación de una carga vertical hacia abajo de 1000N en dicho extremo sucesivamente entre 0 y 310Hz (Escala 1:1).</i>	243
<i>Figura 244. Análisis HARMONIC del cilindro biempotrado aplicando una carga vertical hacia abajo de 1000N en la sección media sucesivamente entre 0 y 340Hz (Escala 1:1).</i>	243
<i>Figura 245. Desplazamientos la sección media del cilindro biempotrado tras la aplicación de una carga vertical hacia abajo de 1000N en dicha sección sucesivamente entre 0 y 340Hz (Escala 1:1).</i>	244
<i>Figura 246. Desplazamientos la sección media del cilindro biempotrado tras la aplicación de una carga vertical hacia abajo de 40N en dicha sección sucesivamente entre 100 y 1700Hz (Escala 1:5).</i>	245
<i>Figura 247. Desplazamientos en el extremo libre del cilindro empotrado en un lado tras la aplicación de una carga horizontal de 1000N en dicho extremo sucesivamente entre 0 y 310Hz (Escala 1:1).</i>	245
<i>Figura 248. Ménsula sometida a una carga puntual en su extremo.</i>	252
<i>Figura 249. Diagrama de momentos flectores del cilindro como ménsula.</i>	254
<i>Figura 250. Factor de escala teórico vs. simulado (Cilindro en ménsula).</i>	257
<i>Figura 251. Viga biempotrada con una carga puntual en una de sus secciones.</i>	258
<i>Figura 252. Diagrama de momentos flectores del cilindro biempotrado.</i>	260
<i>Figura 253. Factor de escala teórico vs. simulado (Cilindro biempotrado).</i>	262
<i>Figura 254. Sistema raíl-rueda-eje analizado anteriormente.</i>	265
<i>Figura 255. Desplazamientos verticales en el sistema raíl-rueda-eje a escala 1:5 (Acero).</i>	269
<i>Figura 256. Campo tensional del eje a escala 1:5 (Acero).</i>	269
<i>Figura 257. Desplazamientos verticales en el sistema raíl-rueda-eje a escala 1:5 (Aluminio).</i>	270
<i>Figura 258. Campo tensional del eje a escala 1:5 (Aluminio).</i>	270
<i>Figura 259. Desplazamientos verticales en el sistema raíl-rueda-eje a escala 1:5 (Hierro colado).</i>	271
<i>Figura 260. Campo tensional del eje a escala 1:5 (Hierro colado).</i>	271
<i>Figura 261. Desplazamientos verticales en el sistema raíl-rueda-eje a escala 1:4 (Acero).</i>	272
<i>Figura 262. Campo tensional del eje a escala 1:4 (Acero).</i>	273
<i>Figura 263. Desplazamientos verticales en el sistema raíl-rueda-eje a escala 1:4 (Aluminio).</i>	273
<i>Figura 264. Campo tensional del eje a escala 1:4 (Aluminio).</i>	274
<i>Figura 265. Desplazamientos verticales en el sistema raíl-rueda-eje a escala 1:4 (Hierro colado).</i>	274
<i>Figura 266. Campo tensional del eje a escala 1:4 (Hierro colado).</i>	275
12. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.	279
13. BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS.	285
14. PRESUPUESTO.	291

ANEXO A. APLICACIONES Y MODELOS MATEMÁTICOS DE INTERÉS EN EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS. 295

<i>Figura 267. Viga convencional de Euler-Bernoulli.</i>	296
<i>Figura 268. Convenio de signos para la tensión σ_x y el momento flector M.</i>	298
<i>Figura 269. a) Elemento viga de Euler-Bernoulli de dos nodos. b) Variables nodales y funciones de forma Hermíticas.</i>	299
<i>Figura 270. Teoría de flexión de vigas de Timoshenko. Giro de la sección normal a la fibra media.</i>	302
<i>Figura 271. Teoría de vigas de Timoshenko. Distribución de tensiones normales y tangenciales. Convenio de signos para momento flector y esfuerzo cortante. ...</i>	303
<i>Figura 272. Elemento viga de Timoshenko de dos nodos. Interpolación de los movimientos y funciones de forma.</i>	305
<i>Figura 273. Elemento viga de Timoshenko de tres nodos. Incógnitas nodales y funciones de forma.</i>	308
<i>Figura 274. Sólido tridimensional. Vector de desplazamientos en un punto.</i>	310
<i>Figura 275. Convenio de signos para las tensiones en un elemento diferencial sólido tridimensional.</i>	311
<i>Figura 276. Elemento tetraédrico de cuatro nodos.</i>	313
<i>Figura 277. Forma explícita de la submatriz de rigidez K_{eij} para el elemento tetraédrico de 4 nodos.</i>	316
<i>Figura 278. Definición geométrica de una placa y convenio de signos para desplazamientos y giros.</i>	319
<i>Figura 279. Deformación del plano medio de una placa delgada y giro de la normal.</i>	320
<i>Figura 280. Convenio de signos para tensiones y momentos en una placa.</i>	322
<i>Figura 281. Esfuerzos en un elemento diferencial de placa.</i>	325
<i>Figura 282. Teoría de placas de Reissner-Mindlin. Convenio de signos para los movimientos y giro de la normal.</i>	328
<i>Figura 283. Convenio de signos para las tensiones τ_{xz} y τ_{yz}.</i>	330
<i>Figura 284. Convenio de signos para los esfuerzos en una placa.</i>	332
<i>Figura 285. Discretización de una placa con elementos placa de Reissner-Mindlin rectangulares de cuatro nodos.</i>	334

ANEXO B. DEFORMADAS DE LOS MODOS PROPIOS DE VIBRACIÓN DEL EJE ANALIZADO EN EL PRESENTE PROYECTO. 343

<i>Figura 286. Modo propio de vibración número 1, según tabla 7 (capítulo 8).</i>	344
<i>Figura 287. Modo propio de vibración número 2, según tabla 7 (capítulo 8).</i>	344
<i>Figura 288. Modo propio de vibración número 3, según tabla 7 (capítulo 8).</i>	345
<i>Figura 289. Modo propio de vibración número 4, según tabla 7 (capítulo 8).</i>	345
<i>Figura 290. Modo propio de vibración número 5, según tabla 7 (capítulo 8).</i>	346
<i>Figura 291. Modo propio de vibración número 6, según tabla 7 (capítulo 8).</i>	346
<i>Figura 292. Modo propio de vibración número 7, según tabla 7 (capítulo 8).</i>	347
<i>Figura 293. Modo propio de vibración número 8, según tabla 7 (capítulo 8).</i>	347
<i>Figura 294. Modo propio de vibración número 9, según tabla 7 (capítulo 8).</i>	348
<i>Figura 295. Modo propio de vibración número 10, según tabla 7 (capítulo 8).</i>	348
<i>Figura 296. Modo propio de vibración número 11, según tabla 7 (capítulo 8).</i>	349
<i>Figura 297. Modo propio de vibración número 12, según tabla 7 (capítulo 8).</i>	349

<i>Figura 298. Modo propio de vibración número 13, según tabla 7 (capítulo 8).</i>	350
<i>Figura 299. Modo propio de vibración número 14, según tabla 7 (capítulo 8).</i>	350
<i>Figura 300. Modo propio de vibración número 15, según tabla 7 (capítulo 8).</i>	351
<i>Figura 301. Modo propio de vibración número 16, según tabla 7 (capítulo 8).</i>	351
<i>Figura 302. Modo propio de vibración número 17, según tabla 7 (capítulo 8).</i>	352
<i>Figura 303. Modo propio de vibración número 18, según tabla 7 (capítulo 8).</i>	352
<i>Figura 304. Modo propio de vibración número 19, según tabla 7 (capítulo 8).</i>	353
<i>Figura 305. Modo propio de vibración número 20, según tabla 7 (capítulo 8).</i>	353

Índice de tablas

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS.	1
2. CONCEPTOS FERROVIARIOS.....	11
3. MATERIAL RODANTE FERROVIARIO.	45
<i>Tabla 1. Características de los bogies en trenes convencionales y de alta velocidad. ...</i>	
	49
4. EJES FERROVIARIOS.	75
5. CONCEPTOS COMPLEMENTARIOS DE MECÁNICA.	87
<i>Tabla 2. Valores de a y b para el cálculo del factor de acabado superficial.....</i>	
	95
<i>Tabla 3. Valores del factor de confiabilidad.</i>	
	97
<i>Tabla 4. Resumen de las ecuaciones de las teorías de Goodman y Soderberg para ejes a fatiga.....</i>	
	121
6. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.....	129
7. METODOLOGÍA.	147
8. ESTUDIO DE TENSIONES Y DESPLAZAMIENTOS EN EL CONJUNTO EJE-RAÍL-RUEDA DE UN FERROCARRIL.	159
<i>Tabla 5. Resumen de resultados del estudio de tensiones y deformaciones sobre el conjunto eje-raíl-rueda cuando se aplica la carga máxima de 25t.</i>	
	179
<i>Tabla 6. Esfuerzos máximos permitidos para ejes macizos para calidad de acero EA4T (Fuente: norma UNE-EN 13103:2010+A1).....</i>	
	182
<i>Tabla 7. Modos propios de vibración del eje ferroviario (Del 1 al 4).</i>	
	183
<i>Tabla 8. Modos propios de vibración del eje ferroviario (Del 5 al 8).</i>	
	184
<i>Tabla 9. Modos propios de vibración del eje ferroviario (Del 9 al 12).</i>	
	185
<i>Tabla 10. Modos propios de vibración del eje ferroviario (Del 13 al 16).</i>	
	186

<i>Tabla 11. Modos propios de vibración del eje ferroviario (Del 17 al 20).....</i>	<i>187</i>
9. ESTUDIO A FATIGA DE UN EJE FERROVIARIO.	189
<i>Tabla 12. Límite a fatiga en función del número de ciclos.</i>	<i>199</i>
<i>Tabla 13. Límite a fatiga del eje ferroviario en función del número de ciclos.</i>	<i>203</i>
10. ESTUDIO DE UN EJE FISURADO MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.	207
<i>Tabla 14. Cálculo del FIT para una carga de 25Tm</i>	<i>215</i>
<i>Tabla 15. Cálculo del FIT para una carga de 320Tm.</i>	<i>215</i>
<i>Tabla 16. Valor del FIT en modo de fractura I calculado utilizando el MEF.</i>	<i>216</i>
<i>Tabla 17. Valor del FIT en modo de fractura I calculado analíticamente utilizando la MFLE.</i>	<i>219</i>
11. APLICACIÓN DEL MEF AL ANÁLISIS ADIMENSIONAL PARA LA INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS DE UN BANCO DE ENSAYOS DE EJES A ESCALA.	221
<i>Tabla 18. Materiales a utilizar en el estudio de los modos propios de vibración.</i>	<i>223</i>
<i>Tabla 19. Relación entre modos propios de vibración de modelos escalados de acero y aluminio (Modelo libre).</i>	<i>246</i>
<i>Tabla 20. Relación entre modos propios de vibración de modelos escalados de acero y aluminio (Modelo biempotrado).</i>	<i>247</i>
<i>Tabla 21. Relación entre modos propios de vibración de modelos escalados de acero y hierro colado (Modelo libre).</i>	<i>248</i>
<i>Tabla 22. Relación entre modos propios de vibración de modelos escalados de acero y hierro colado (Modelo biempotrado).</i>	<i>249</i>
<i>Tabla 23. Influencia del coeficiente de Poisson en la relación entre los modos propios de vibración del modelo libre de acero y hierro colado.</i>	<i>250</i>
<i>Tabla 24. Fuerzas a aplicar al cilindro considerado como ménsula en función de la escala.</i>	<i>254</i>
<i>Tabla 25. Fuerzas a aplicar al cilindro construido con aluminio considerado como ménsula en función de la escala.</i>	<i>256</i>
<i>Tabla 26. Resultados simulados utilizando el MEF para la comprobación del análisis adimensional (Cilindro en ménsula).</i>	<i>258</i>
<i>Tabla 27. Resultados simulados utilizando el MEF para la comprobación del análisis adimensional (Cilindro biempotrado).</i>	<i>262</i>
<i>Tabla 28. Resultados simulados utilizando el MEF para la comprobación del análisis adimensional considerando la influencia del coeficiente de Poisson (Cilindro en ménsula).</i>	<i>263</i>
<i>Tabla 29. Resultados simulados utilizando el MEF para la comprobación del análisis adimensional considerando la influencia del coeficiente de Poisson (Cilindro biempotrado).</i>	<i>264</i>
<i>Tabla 30. Resultados obtenidos de los cálculos previos para el análisis adimensional del conjunto eje-raíl-rueda.</i>	<i>268</i>
<i>Tabla 31. Modos propios de vibración del eje ferroviario libre en el espacio (diferentes escalas y materiales).</i>	<i>275</i>

<i>Tabla 32. Relaciones existentes entre los diferentes modos propios de vibración del eje ferroviario libre en el espacio a diferentes escalas y constituido por diferentes materiales.</i>	<i>276</i>
<i>Tabla 33. Errores existentes en las relaciones teóricas y simuladas entre modos propios de vibración de diferentes materiales.</i>	<i>276</i>
12. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.	279
13. BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS.	285
14. PRESUPUESTO.	291
<i>Tabla 34. Resumen de gastos de personal.</i>	<i>292</i>
<i>Tabla 35. Resumen de licencias y equipos informáticos.</i>	<i>292</i>
<i>Tabla 36. Resumen de gastos adicionales.</i>	<i>293</i>
<i>Tabla 37. Presupuesto final.</i>	<i>293</i>
ANEXO A. APLICACIONES Y MODELOS MATEMÁTICOS DE INTERÉS EN EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.	295
ANEXO B. DEFORMADAS DE LOS MODOS PROPIOS DE VIBRACIÓN DEL EJE ANALIZADO EN EL PRESENTE PROYECTO.	343

Capítulo 1

Introducción y objetivos.

1.1 Introducción.

El 30 de Junio de 2009, la ciudad italiana de Viareggio sufrió de madrugada uno de los peores accidentes ferroviarios de la historia de dicho país que se saldó con 32 muertos, decenas de heridos y cientos de evacuados, según los balances de las autoridades. [1]

El incidente se produjo poco después de la medianoche, cuando un tren de mercancías cargado de gas licuado de petróleo (GLP) descarriló y explotó (ver figuras 4 y 5) a su paso por la estación de la ciudad, que se halla en pleno centro urbano. [1] La fuerte deflagración, a la que sucedieron otras de menor intensidad, provocó el derrumbe de dos edificios, mientras que otros muchos sufrieron daños de diversa índole, teniendo incluso que ser evacuados. [1]

Todo indica que el tren sufrió un fallo estructural en uno de sus vagones y descarriló, lo que provocó la fuga de gas que luego generaría la explosión. La causa concreta del desastre fue la rotura del eje delantero de un vagón, de los catorce que componían el convoy, fracturado al pasar el tren por la estación. [1]

En la figura 1 se observa un esquema que describe el accidente, mientras que en las figuras 2 y 3 se muestran las dos partes en las que el eje quedó dividido como consecuencia de la fractura.

La dinamica dell'incidente

IL VAGONE

Il convoglio che trasportava Gpl era composto da 14 vagoni. 5 sono deragliati

LA CAUSA

Secondo i primi accertamenti, un cilindro dell'asse del primo vagone si è spaccato provocando il deragliamento

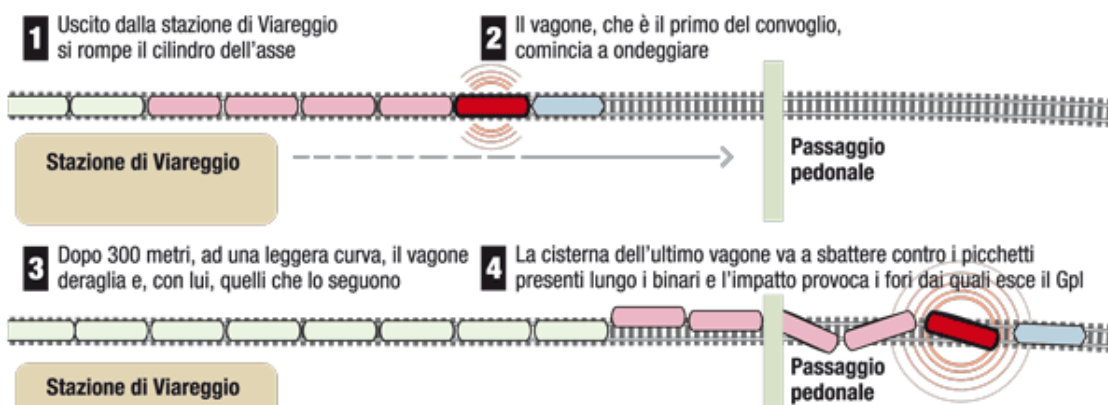
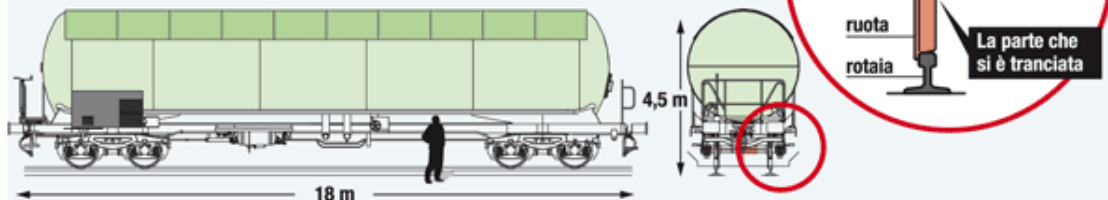


Figura 1. Descripción del accidente de Viareggio 2009.



Figura 2. Zona de fractura del eje del accidente de Viareggio 2009. Sección correspondiente a la zona de calaje de la rueda.



Figura 3. Zona de fractura del eje del accidente de Viareggio 2009. Sección correspondiente a la zona de apoyo de la caja de grasa.



Figura 4. Incendio consecuencia de la explosión del GLP que transportaba el tren accidente de Viareggio 2009.



Figura 5. Bomberos trabajando para sofocar el incendio consecuencia de la explosión del GLP que transportaba el tren accidente de Viareggio 2009.

Este accidente sólo es uno de los múltiples existentes en el mundo ferroviario. Sin embargo, tiene la particularidad de haberse producido como consecuencia del fallo estructural del vehículo ferroviario, por lo que es necesario que, desde la Ingeniería, sea analizado en profundidad. Consecuencia de ello, surgen gran cantidad de cuestiones que esperan respuesta: ¿cuál fue la causa de este accidente? , ¿fue verdaderamente algo imprevisible o consecuencia de algún tipo de negligencia?, ¿qué se puede hacer para evitar este tipo de sucesos?, ¿son diseñados los vehículos ferroviarios con suficiente seguridad?,...

Por otro lado, hay que tener en cuenta que los fallos de cualquier diseño pueden ser consecuencia de errores del mismo, de montaje o de uso. Son tres variables que, probablemente, influirán conjuntamente pero, desde un punto de vista ingenieril, lo inmediato sería eliminar todos los errores posibles de diseño.

Como consecuencia de ello, surge la idea del presente proyecto, según la cual se analizarán diferentes causas del fallo en servicio de los ejes ferroviarios mediante la utilización del método de los elementos finitos (MEF).

La Ingeniería Asistida por Computador (CAE) constituye una faceta trascendental en todo el proceso capaz de asegurar el cumplimiento de los requisitos de calidad que la sociedad industrial de hoy exige. En aquellos aspectos de la Ingeniería relativos al cálculo y análisis técnicos, el Método de los Elementos Finitos (MEF) se muestra como el más utilizado en la actualidad.

Sin profundizar técnicamente en la explicación, el método de los elementos finitos consiste en un modelo informático de un sistema físico del que se pueden obtener múltiples tipos de resultados tras la aplicación de unas determinadas condiciones de contorno.

A través de este método, un analista es capaz de verificar si una propuesta de diseño se puede realizar con las especificaciones establecidas antes de la fabricación de un prototipo. Asimismo, en caso de modificarse un diseño si este tuviera un fallo estructural, se puede utilizar para intentar determinar las causas del mismo.

En general, desde el punto de vista de la mecánica estructural, existen dos tipos de análisis que se utilizan en la industria: el modelado 2-D y el modelado 3-D (podría también incluirse el 1-D, pero es poco común). El modelado 2-D es sencillo y permite que el análisis se ejecute en un equipo relativamente normal, sin embargo, en ciertas condiciones muy concretas, los resultados podrían ser poco precisos. El modelado 3-D, por su parte, pese a que solucionaría estos inconvenientes, tiene un coste computacional mucho mayor.

Considerando otros aspectos del MEF, dentro de los diversos sistemas informáticos de elementos finitos, el diseñador puede insertar numerosos algoritmos (funciones) que pueden hacer que el sistema se comporte de forma lineal o no lineal. Los sistemas lineales son mucho menos complejos y, por lo general, no toman en cuenta la deformación plástica. Los sistemas no lineales, por su parte, consideran la deformación plástica y, muchos de ellos, también son capaces de probar un material hasta llegar a la fractura.

Además de lo anteriormente indicado y de otras variables que podemos considerar controladas, en el análisis a través del MEF entran en juego condiciones que son difícilmente medibles: simplificaciones en la generación de la geometría, hipótesis acerca de las condiciones de contorno, error de cálculo interno del equipo informático, tipo de elemento finito o mallado, etc. Esto supone que, a la hora de llevar a cabo el análisis, no exista forma alguna de conocer, a ciencia cierta, si el modelo está reproduciendo fielmente la realidad.

Todo ello será tenido en cuenta para el análisis de ejes ferroviarios y para la obtención de conclusiones del presente Proyecto Fin de Carrera, por lo que será básico conocer la bondad del método de los elementos finitos en los estudios que se lleven a cabo.

1.2 Objetivos.

En base a lo anteriormente expuesto, este Proyecto Fin de Carrera se propone satisfacer el siguiente objetivo principal:

- Plantear y llevar a cabo, mediante la aplicación del **Método de los Elementos Finitos (MEF) y diversas técnicas analíticas**, todos los estudios y análisis que se consideren necesarios, y que se especifican a continuación, para avanzar en el conocimiento tecnológico de los ejes ferroviarios.

Para cumplir el objetivo principal enunciado en el párrafo anterior, se plantean los siguientes propósitos secundarios:

1. **Introducir las nociones básicas relacionadas con el mundo del ferrocarril:** infraestructura y superestructura, enclaves ferroviarios, material rodante ferroviario y componentes del mismo, etc., así como **profundizar en el concepto de eje ferroviario y sus implicaciones.**

2. Realizar el **modelado del conjunto eje-raíl-rueda** para su utilización en una aplicación de elementos finitos.
3. **Aplicar el Método de los Elemento Finitos (MEF) a la obtención de las tensiones y desplazamientos existentes sobre el conjunto eje-raíl-rueda de un ferrocarril** cuando éste se encuentra estáticamente sometido a una determinada carga consecuencia del peso que soporta.
4. **Obtener los modos propios de vibración del eje modelado.**
5. **Llevar a cabo el cálculo y análisis a fatiga del eje ferroviario del conjunto eje-raíl-rueda** aplicando técnicas analíticas y el MEF, con objeto de comparar los resultados obtenidos mediante ambas formas de estudio.
6. **Introducir la teoría de la Mecánica de la Fractura Lineal y Elástica (MFLE) y el estudio de ejes fisurados.** Se aplicará el MEF al cálculo de los mismos y se comparará con modelos analíticos.
7. A partir de los resultados obtenidos de los estudios indicados en los objetivos anteriores, **se determinará la sensibilidad y precisión del método de los elementos finitos para el estudio de modelos de ejes ferroviarios.**
8. Si los resultados obtenidos lo hicieran necesario, establecer los primeros pasos a seguir en el **diseño de un banco de ensayos de ejes ferroviarios a escala, en este caso, mediante la aplicación del análisis adimensional y del MEF.**

Buscando en cumplimiento de los hitos anteriormente expuestos, se hará uso de **varios modelos analíticos extraídos de la literatura tecnológica** y se emplearán **diversas aplicaciones informáticas**:

- **Solid Edge**, para el modelado geométrico tridimensional inicial del conjunto eje-raíl-rueda.
- **ANSYS**, para el modelado en detalle y para los análisis de elementos finitos.
- **ED-Tridim**, para el cálculo de esfuerzos en el eje (momentos flectores, cortantes o axiles).
- **Microsoft Excel** para la manipulación y tratamiento de datos que se extraigan de las aplicaciones informáticas anteriores (ANSYS, principalmente).

1.3 Estructura del documento.

El contenido de este proyecto se encuentra dividido en catorce capítulos y dos anexos. El primero de los capítulos se compone de la presente introducción, incluyendo, como ya se ha visto, los objetivos del trabajo y la estructura de la memoria.

En el capítulo 2 se hace un breve resumen de la historia del ferrocarril y se lleva a cabo un recorrido por los diferentes conceptos ferroviarios a tener en cuenta: superestructura,

infraestructura y enclaves ferroviarios, cada uno de ellos con una serie de elementos de interés.

En el capítulo 3 se analiza el material rodante ferroviario, con todos los componentes que se han estimado de interés: coches, bogies, suspensión, ruedas, ejes, placas de guarda, sistemas de tracción y frenado, etc. Se intenta dar a conocer de manera sencilla los efectos del comportamiento de algunos de los conceptos mencionados que se han considerado de mayor importancia para las actuaciones del ferrocarril.

En el capítulo 4 se profundiza en el concepto de eje ferroviario, definiéndose, en primer lugar, lo que es un eje de manera genérica y llegando a un relativamente profundo conocimiento sobre los ejes montados y sus implicaciones en el comportamiento dinámico del ferrocarril. Asimismo se lleva a cabo una introducción a los ejes huecos, de gran importancia en los vehículos ferroviarios de alta velocidad.

En el capítulo 5 se describen en profundidad las diferentes teorías y criterios de cálculo a fatiga, tanto de componentes mecánicos como, más concretamente, de ejes. También se lleva a cabo una introducción acerca de la teoría de la Mecánica de la Fractura Lineal y Elástica (MFLE). Por otro lado, se plantea una posible forma de analizar fisuras mediante el MEF, intentando evitar las singularidades que, como consecuencia de su presencia, aparecen.

En el capítulo 6 se realiza una breve descripción del método de los elementos finitos dándose a conocer su historia, sus fundamentos generales, los principios que aplica el método al sólido elástico y los distintos tipos de elementos que se pueden utilizar en un análisis por MEF. Asimismo, se comenta qué es ANSYS y cuáles son sus actuales posibilidades en el mundo de la ingeniería, buscando familiarizar al lector con dicho programa informático.

En el capítulo 7 se describe la metodología empleada para el desarrollo del presente proyecto: cuál es el problema de partida y de qué datos se dispone, cuáles han sido las motivaciones para llevar a cabo cada uno de los análisis y qué procedimiento se ha planteado para desarrollar cada uno de los análisis programados.

En el capítulo 8 se explica, primero, cómo se ha modelizado el conjunto eje-raíl-rueda y, luego, se exponen los resultados de tensiones y deformaciones que se han obtenido de dicho modelo, comprobándose que se cumple la normativa de cálculo de ejes ferroviarios. En este capítulo también se lleva a cabo el análisis modal del eje ferroviario que se estudia.

En el capítulo 9 se lleva a cabo el cálculo a fatiga de un eje ferroviario aplicando las teorías analíticas vistas y el método de los elementos finitos, comparándose ambas formas de proceder.

En el capítulo 10 se aplica la Mecánica de la Fractura Lineal y Elástica (MFLE) al cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones (FIT) de manera analítica y por simulación mediante bibliografía contrastada. Se compararán los resultados analíticos y los obtenidos mediante la aplicación del MEF (por simulación).

En el capítulo 11 se procede a realizar el análisis adimensional necesario, tanto relacionado con los modos propios de vibración como con las tensiones y deformaciones, para la interpretación de los resultados obtenidos en un banco de ensayos de ejes ferroviarios a escala.

En el capítulo 12 se enuncian las principales conclusiones que se pueden extraer del trabajo realizado y se apuntan líneas futuras de desarrollo que quedan abiertas a la finalización del trabajo.

El capítulo 13 contiene un listado de las fuentes bibliográficas empleadas en el desarrollo del proyecto.

En el capítulo 14 se presenta el presupuesto del proyecto.

En el anexo A, se hace referencia a las aplicaciones y modelos matemáticos de interés en el Método de los Elementos Finitos.

Por último, el anexo B, detalla todos los modos propios de vibración correspondientes al eje ferroviario que se irá estudiando a lo largo del presente trabajo.

Capítulo 2

Conceptos ferroviarios.

2.1 Breve historia del ferrocarril.

2.1.1 El ferrocarril como elemento básico en el desarrollo de la sociedad hasta la actualidad.

En el siglo XVIII, los trabajadores de diversas zonas mineras de Europa descubrieron que las vagonetas cargadas se desplazaban con más facilidad si las ruedas giraban guiadas por un carril hecho con planchas de metal, ya que de esa forma se reducía la fricción (ver figura 6). Los carriles para las vagonetas sólo servían para trasladar los productos hasta la vía fluvial más cercana, que por entonces era la principal forma de transporte de grandes volúmenes. El inicio de la Revolución Industrial, en la Europa de principios del siglo XIX, exigía formas más eficaces de llevar las materias primas hasta las nuevas fábricas y trasladar desde éstas los productos terminados. [2]

Así, el ferrocarril, también conocido con el nombre de “camino de hierro”, no es fruto de una idea surgida espontáneamente, sino del resultado de un prolongado proceso iniciado a mediados del siglo XVII para el transporte de carbón en las minas de Inglaterra y Alemania. En aquel entonces, la vía estaba construida por unos largueros de madera apoyados y clavados sobre unas traviesas, también de madera. Más tarde, para evitar el desgaste de la madera, se forraron las caras superiores de los largueros con chapa; al propio

tiempo se conseguía el guiado de las ruedas añadiendo a éstas una pestaña en su parte interna. Posteriormente, su forma tronco-cónica permitió mayores velocidades al facilitar la inscripción de los carruajes en las curvas. [3]



Figura 6. El inicio del ferrocarril: vagonetas de mercancías.

En el año 1804 se inauguró en Inglaterra el primer ferrocarril de servicio público. Unía Wands-Worth-Croydon y Carshalton y sus trenes eran remolcados por tiros de caballos. Diez años más tarde se inició un movimiento revolucionario con la introducción de la máquina de vapor de George Stephenson [3] (La primera locomotora a vapor fue construida por Richard Trevitick en 1804, 21 años antes de la máquina de George Stephenson. Esta máquina no dio resultado porque circulaba por carriles de hierro fundido inapropiados para su peso. [3] Habían transcurrido dos décadas hasta que se desarrollaron los rieles de hierro fundido que soportaban el peso de una locomotora de vapor. [2]). La potencia necesaria para arrastrar trenes, en lugar de uno o dos vagones, se aseguró colocando una de dichas locomotoras sobre dos o más ejes con las ruedas unidas mediante bielas. [2]

La primera vía férrea pública del mundo, la línea Stockton-Darlington, en el noreste de Inglaterra, dirigida por George Stephenson, se inauguró en 1825. Durante algunos años esta vía sólo transportó carga y, sobre ella, en ocasiones también utilizaban caballos como fuerza motora. La primera vía férrea pública para el transporte de pasajeros y de carga que funcionaba exclusivamente con locomotoras de vapor, fue la de Liverpool-Manchester, inaugurada en 1830. También fue dirigida por George Stephenson, en esta ocasión con ayuda de su hijo Robert Stephenson (ver figura 7). [2]

La intervención estatal se consideró primordial, a la hora de elegir y unificar el ancho de vía, es decir, la mínima distancia entre las caras interiores de los carriles, que es el parámetro que mejor define una vía ferroviaria, ya que limita los tipos de material móvil que lo pueden utilizar y condiciona las conexiones posibles con otros ferrocarriles. [2]

El control gubernamental más estricto en la construcción de los primeros ferrocarriles europeos se dio en Francia, con el resultado de que en el siglo XIX contaba con la red de líneas troncales mejor planificada del continente y también la mejor preparada para la velocidad. [2]

Los constructores de Europa y de Norteamérica adoptaron en general el ancho de 1435 mm (56 pulgadas y media) del proyecto de George Stephenson, que se basó en los tendidos de vía para vagonetas de mina, su lugar de origen. Empíricamente se había demostrado que era la dimensión más adecuada para el arrastre por medios humanos o con caballerías. La normalización internacional de este ancho no se produjo hasta la Conferencia de Berna de 1887. [2]



Figura 7. George y Robert Stephenson.

Sin embargo, España optó deliberadamente por el ancho de 1668 mm (el equivalente a seis pies castellanos de la época). Se ha especulado que esta adopción de ancho obedecía a una forma de protección contra la invasión francesa, pese a estar ya en la segunda mitad del siglo XIX. Argumentos más técnicos apuntan a que siendo España un país de orografía accidentada, las fuertes pendientes de los trazados exigirían que las locomotoras, para aumentar su potencia, tuviesen un cajón de fuego más amplio que el resto de las europeas, lo que obligaría a ensanchar el conjunto mecánico y, por ende, la vía. [2]

En Estados Unidos, la vía ancha se adoptó en muchas líneas, sobre todo en el sur, y la normalización a 1435 mm no se aplicó en el ámbito nacional hasta después de la Guerra Civil estadounidense (1861-1865). [2]

En la actualidad, el tráfico ferroviario internacional entre países con diferentes anchos de vía se resuelve con vagones provistos de ejes de ancho variable que en las estaciones fronterizas, al cruzar un tramo de transición, automáticamente adoptan el nuevo ancho. No obstante, también se mantienen los clásicos transbordos de tren en estas estaciones. [2]

En América hispana, excluyendo el caso de Cuba que será explicado más adelante, el primer ferrocarril se inauguró el 15 de septiembre de 1850 en México. Se trataba de un tramo de menos de 20 km que unía el puerto de Veracruz con la vecina población de San Juan. Más tarde, en 1873, se completó la línea que unía el famoso puerto con la capital del país. Las inversiones importantes para el desarrollo de las redes ferroviarias en América Latina se realizaron a través de concesiones que otorgaban los gobiernos, en especial a empresarios británicos y estadounidenses, como ocurrió en Argentina. En 1857 se inauguró el primer

ferrocarril de ese país con el propósito de enlazar los centros de producción ganadera y minera con el puerto desde donde se exportaba la materia prima a Europa y Estados Unidos. [2]

En todos los casos mencionados, al cabo de pocos años, los ferrocarriles habían convencido a los comerciantes de su superioridad sobre los canales, no sólo por velocidad y por ser más directos, sino porque funcionaban con cualquier clima, mientras que las vías de agua podían congelarse en invierno y descender a niveles no aptos para la navegación durante el verano. [2]

En cuanto a las primeras locomotoras de vapor fabricadas, éstas pueden clasificarse de diversas formas. La clasificación más utilizada, sin embargo, se basa en el número y disposición de las ruedas. Esta clasificación proporciona el número de ruedas en la carretilla de arrastre, el número de ruedas motrices y el número de ruedas en la carretilla de remolque. De esta forma, una locomotora 2-4-0 tendría una carretilla de arrastre de dos ruedas, cuatro ruedas motrices y carecería de carretilla de arrastre. Muchas locomotoras tienen también nombres especiales según su tipo. [2]

Los continuos avances relativos a tamaño, potencia y velocidad de la locomotora de vapor durante los primeros cien años de historia del ferrocarril ofrecieron los resultados más impresionantes en Norteamérica. En la década de 1920 la necesidad de que algunas vías férreas de Estados Unidos soportaran de 4.000 a 5.000 toneladas recorriendo largas pendientes en zonas montañosas impulsó el desarrollo de la locomotora de vapor con chasis articulado, en la que una sola caldera de gran tamaño alimentaba a dos motores independientes que se articulaban entre sí, de modo que podía inscribirse en las curvas sin grandes problemas. Los últimos ejemplos de este tipo, que con sus grandes ténderes (vagón enganchado a la locomotora, que lleva el combustible y agua para alimentarla) de numerosas ruedas para aumentar la reserva de carbón y el agua, pesaban más de 500 toneladas y generaban de 7.000 a 8.000 caballos de vapor. [2]

La velocidad máxima con locomotora de vapor se registró en Europa y la alcanzaron las locomotoras aerodinámicas de Gran Bretaña y Alemania, construidas para servicios de largo recorrido y que lograron una velocidad media de 115km/h (incluso más) entre dos paradas. En una prueba realizada en 1936, una locomotora German de Clase 05 con disposición de ejes 2-3-2 alcanzó los 200,4 km/h. La última marca de velocidad con vapor fueron los 203 km/h de la locomotora Mallard de Clase A y ejes 2-3-1, de la empresa británica London and North-Eastern Railway, en una prueba realizada en julio de 1938. [2]

Hasta 1940, los motores a vapor proporcionaban la fuerza motriz de la mayoría de las locomotoras utilizadas en las vías férreas. Después, la locomotora de vapor se fue quedando obsoleta, primero en los Estados Unidos y más adelante en el resto del mundo. Hacia finales de la década de 1980, sólo unas pocas, como las utilizadas en líneas turísticas (ver figura 8), se empleaban en los países industrializados. Esto fue debido a que un inconveniente de la locomotora de vapor es la interrupción de servicio por las paradas técnicas que impone su frecuente mantenimiento. Además de esto, la fuerte competencia del transporte por carretera surgida en la segunda mitad del siglo XX, hizo que el transporte por ferrocarril tuviera que reajustar sus costes, operación que se vio favorecida con la utilización de nuevas energías alternativas al vapor. [2]

De este modo empieza la era de las locomotoras equipadas con motor diesel que precisan menor tiempo de mantenimiento y, sobre todo, las de tracción eléctrica, que pueden funcionar sin descanso durante días. Con estas técnicas la explotación de una línea llega al

máximo rendimiento, al hacer los trenes mayor número de viajes con tiempo mínimo de entretenimiento, lo que equivale a mantener las líneas con una máxima ocupación. Este índice se ve más favorecido cuando el tren está remolcado por una locomotora eléctrica que cuando lo está por una de vapor. Con este principio económico, empezó la decadencia del vapor en favor del desarrollo del diesel y de la electrificación de las líneas. [2]



Figura 8. Locomotora 140-2054, conocida como "La Baldwin" por sus fabricantes Babcock&Wilcox, del tren de la fresa que realiza en recorrido turístico Madrid-Aranjuez.

Así, las locomotoras desarrolladas en el siglo XX fueron las eléctricas (figura 9), que reciben la energía eléctrica mediante una red de cable superior (catenaria) o un tercer carril situado junto a la vía normal (vías férreas), y las locomotoras diesel-eléctricas (figura 10). En las locomotoras diésel-eléctricas, conocidas comúnmente como diésel, los motores de combustible fósil se utilizan para proporcionar energía a generadores o alternadores conectados a rectificadores de estado sólido que mueven motores eléctricos conectados a los ejes. Este tipo de locomotora elimina la necesidad de costosas líneas de transmisión de energía y, comparada con la locomotora a vapor, tiene mayor disponibilidad, es decir, mayor número de horas productivas por día, puesto que no necesita realizar paradas frecuentes para repostar agua y requerir otros servicios. Otras ventajas de los motores diésel incluyen su relativa eficacia para convertir el gasoil en energía disponible y su capacidad para desarrollar una mayor proporción de su máxima potencia de arrastre a bajas velocidades. Además, mientras que las locomotoras a vapor requieren un conductor y un fogonero, un solo conductor puede manejar varias diesel-eléctricas, lo que permite trenes de mayor longitud con menor número de empleados. [2]

Actualmente, los sistemas de control de las locomotoras se han convertido en dispositivos electrónicos, que sustituyen la mayor parte de las funciones de regulación eléctrica. Los microprocesadores a bordo controlan la velocidad del motor, la inyección de gasoil y el trabajo del alternador, y se interrelacionan con sistemas mejorados para detectar problemas de

tracción de las ruedas motrices, produciendo una corrección más rápida y una adherencia más óptima. Una función adicional del microprocesador es controlar el rendimiento de todos los sistemas de la locomotora, incrementando su fiabilidad y facilitando la corrección de los problemas. Una innovación importante de la locomotora es la introducción de motores de tracción de frecuencia variable, voltaje variable y de corriente alterna de tres fases en lugar de motores serie de corriente directa, reduciendo el peso y mejorando la adherencia de las ruedas a la vía. [2]



Figura 9. Locomotora eléctrica del Talgo Alta Velocidad con cambio automático de ancho de vía, serie130, en servicio.



Figura 10. Locomotora diésel 352 “Virgen del Rosario”.

Por otro lado, después de la II Guerra Mundial, la investigación realizada en la ingeniería de combustión ayudó al desarrollo de locomotoras de turbina-eléctricas (ver figura 11), en las que turbinas de gas o vapor se usaban para impulsar generadores que proporcionaban energía a motores eléctricos. En el caso de turbina de vapor, se necesitaba una caldera para producir el vapor y, en el caso de la turbina de gas, se generaban gases de combustión en una cámara situada delante de la maquinaria de la turbina. Con ello, el carbón o el aceite podían usarse como carburante para producir vapor o gas para el funcionamiento de la turbina. Además, el propano líquido se ha utilizado de forma experimental como carburante para turbinas de gas. [2]

Todas estas locomotoras basadas en turbinas se han considerado poco económicas para el transporte general de carga. Sólo la de gas, con tracción mediante transmisión hidráulica, ha continuado en servicio en la década de 1990 en automotores que propulsan trenes ligeros de pasajeros. [2]



Figura 11. Locomotora con turbina de gas.

En los trenes de fin del siglo XX y comienzos del XXI, domina la idea de gran comodidad y alta velocidad, tratando de competir en largo recorrido no ya con el automóvil sino con el avión. [2]

En Europa occidental los núcleos urbanos con alta población están relativamente cercanos, por ello para utilizar su interconexión ferroviaria se ha tendido a la modernización de las vías y en consecuencia a su señalización junto a la nueva tecnología de tracción, con lo que las velocidades entre 160 y 200 km/h son habituales. [2]

Los trenes de largo recorrido han logrado mantener un tráfico frecuente y regular, a lo que hay que añadir importantes mejoras en la comodidad: los avances en la suspensión en los engranajes y la supresión de las uniones de las vías gracias a la técnica de la soldadura continua de los carriles hacen que los trenes de pasajeros se deslicen con gran suavidad, y los

vagones suelen estar dotados de aislamiento acústico, aire acondicionado y servicios de telefonía y audiovisuales, además de los clásicos de restauración, ducha personal y la posibilidad de transporte en el propio tren del automóvil del viajero. La viabilidad del servicio de pasajeros para viajes de más de 400km ha precisado desarrollos tecnológicos que permiten su funcionamiento a velocidades muy superiores. [2]

A partir de la década de 1960, el primer tren bala japonés demostró que las grandes velocidades eran posibles. Los franceses perfeccionaron su TGV (Train á Grande Vitesse, "Tren de Gran Velocidad"). La primera vía para TGV, desde el sur de París hasta Lyon se terminó en 1983 lográndose una velocidad comercial de 270 km/h. En 1994 se habían terminado otras cuatro líneas para TGV, que ampliaban el servicio de trenes de alta velocidad desde París hacia el norte y oeste de Francia y se iniciaron las líneas hacia el sur y la frontera española. Su velocidad ha pasado de los 300 km/h. [2]

Pero la investigación aplicada por parte de la SNCF (Société Nationale des Chemins de fer Français, "Sociedad Nacional de Ferrocarriles Franceses"), no se detuvo aquí y en pruebas con tren real efectuadas en mayo de 1990, un TGV alcanzó la marca mundial de velocidad sobre rieles con un registro de 515,3 km/h. [2]

2.1.2 El ferrocarril en España.

Los intentos precursores de construcción de ferrocarriles en España tuvieron lugar a fines de la década de 1820. La primera concesión que se otorgó fue en 1829 a José Díez Imbrechts, terrateniente de Puerto Real y propietario de una bodega de vinos en Cádiz, para un proyecto de construcción de ferrocarril entre Jerez y el Portal, sobre el río Guadalete, de apenas 6 Km. de longitud. La empresa fracasó por falta de financiación. Hubo varios intentos más de construcciones de ferrocarril, pero todas ellas fracasaron por la inestabilidad económica y política. [3]

El primer tren en el Estado español actual se inauguró el 28 de octubre de 1848 entre las localidades de Barcelona y Mataró con un recorrido de 40 km sobre raíles de ancho de vía de 6 pies (1,67m) que cruzaba 44 puentes, un túnel de 135 m y se paraba en ocho estaciones. [4]

La historia de esta aventura empresarial tiene un gran interés porque refleja aspectos claves de la sociedad de la época. Por ejemplo, el propulsor del ferrocarril fue Miquel Biada, un matoronés que vivía en Cuba cuando el 19 de noviembre de 1837 se inauguró el, verdaderamente, primer ferrocarril español (en aquel momento Cuba era una colonia española) entre la Habana y Bejucal con 28 km. de recorrido. Estaba pensado, sobre todo, para el transporte de azúcar. De regreso a Cataluña, Biada consiguió forjar la iniciativa de un ferrocarril (que, como se ha visto, no era la primera vez que se planteaba). Su éxito fue convencer a empresarios ingleses para que se implicasen en la inversión. [4]

El gobierno otorgó la concesión de la línea Mataró-Barcelona en 1843 imponiendo condiciones de tipo financiero y tarifario, y otras varias como no poder construir en ancho europeo. Camino de Hierro de Barcelona a Mataró, la empresa explotadora, poseía cuatro locomotoras construidas en Inglaterra que permitía mantener tres trenes en servicio de ida por la mañana y tres de vuelta por la tarde. El recorrido se hacía en una hora a una velocidad de entre 40 y 60 km/h y podía remolcar hasta 130 t de carga. Los vagones de pasajeros eran más o menos lujosos según la categoría. Un viaje en tercera costaba 6 reales, y el primer año se transportaron 675.828 viajeros. La historia es apasionante por la perseverancia de sus

promotores y las muchas dificultades que tuvieron que vencer para un proyecto que abría una nueva página de la historia. [4]

En el Estado español, hacía 1855 ya había en funcionamiento 405 km de red. La revolución liberal promovió aquel mismo año la Ley General del Ferrocarril que facilitaba las inversiones extranjeras para construir ferrocarriles. [4] La aprobación de dicha ley desencadenó la fiebre de las construcciones ferroviarias y la aparición de las primeras empresas dedicadas a los ferrocarriles: la Compañía de los Ferrocarriles de Madrid a Zaragoza y Alicante, conocida como MZA surgió en 1856, la Compañía de los Caminos de Hierro del Norte de España surge en 1858, la Compañía de los Ferrocarriles Andaluces se constituye en 1877 absorbiendo distintas líneas del Sur, y así fueron surgiendo distintas compañías a lo largo y ancho de la Península. [3]

En 1875 las cuatro capitales catalanas estaban unidas por el tren. En 1877 una nueva ley de ferrocarriles impulsaba a construir líneas en ancho inferior a 1668 mm lo que permitía la construcción de la vía estrecha, generalmente de ancho métrico. El año 1901 la red ferroviaria estatal era de más de 10.000 km de ancho ibérico y 2.000 km de vía estrecha. En el 1905 el tramo Barcelona-Sarriá (de ancho europeo) se electrifica. Esta nueva tecnología abriría un camino imparable para el futuro desarrollo del tren. [4]

En el momento de máximo esplendor del tren (antes de la Primera Guerra Mundial) existía una red de 18000 km de ancho ibérico y 5500 km de vía estrecha. A principios de los años 20, las pésimas condiciones económicas generales afectaron a la viabilidad de un gran número de compañías ferroviarias. Por eso, en el 1924, durante la dictadura de Primo de Rivera se otorgaron ayudas financieras importantes para modernizar las compañías ferroviarias. No obstante, la gravedad de la crisis hizo recomendable que el Estado español emprendiera en el 1928 la nacionalización de las primeras líneas férreas. En el 1941 el Estado español rescató definitivamente todas las compañías de ancho ibérico y se creó la Red Nacional de los Ferrocarriles Españoles (RENFE). Este proceso no fue ajeno a la nacionalización del ferrocarril en el resto de los países europeos. [4]

Con el nacimiento de la Renfe el Estado inicia las inversiones necesarias para mantener una red de unos 12000 Km y modernizar las infraestructuras (vías, trenes, puentes, túneles, etc.). El tren fue uno de los grandes beneficiarios de la ayuda americana del Plan Marshall durante los años cincuenta. [4]

Durante más de un siglo (127 años) la tracción de vapor dominó la red ferroviaria. En 1954 existían 3449 locomotoras de vapor de vía ancha. Pero en esta misma época se inicia un plan de electrificación que hoy cuenta con un 56% electrificado de la red de Renfe (6857 km). En 1964 se pone en servicio el Talgo III con ejes de ancho variable que permitía adentrarse en la red europea sin transbordo y abría una nueva página en la historia del ferrocarril español. [4]

Durante años coexisten tres tipos de tracción (vapor, diesel y eléctrica), hasta que en 1975 en la estación de Vicalvaro en Madrid, el entonces príncipe de Asturias, hoy rey de España Juan Carlos I, apagó la última caja de fuegos de la tracción vapor. [3]

Los años 80 marcaron un nuevo giro en la historia ferroviaria en la medida en que se tomó conciencia de que el tren debe ser rentable y que las inversiones han de ser razonables en el marco de una relación contractual entre el Estado y la compañía. [4] Se transforma radicalmente la estructura interna de la compañía, pasando de la organización departamental a dividirla en Unidades de Negocio (UU.NN.), introduciéndose un nuevo modelo de gestión. [3]

Esta nueva política, no obstante, significó el cierre de 914 km el 1 de enero de 1985. La aportación de las Comunidades Autónomas permitió modernizar 637 km para servicios metropolitanos y comarcales. Pero, este sacrificio serviría para emprender una potente inversión estatal para el horizonte 2000 y recuperar el prestigio social del tren. Los servicios de largo recorrido y las cercanías han sido los grandes beneficiarios tanto por el aumento de velocidad como por la comodidad y calidad en el servicio. Es importante destacar la puesta en servicio de la primera línea de alta velocidad entre Madrid y Sevilla, el año 1992, que marcaba el inicio de esta nueva generación de trenes. Una infraestructura bastante criticada por los sectores ecologistas que, por otro lado, tiene un gran éxito social como servicio de transporte rápido, a pesar que es necesario reconocer que obliga a inversiones caras. [4]

En 2004 se inauguró el tramo Madrid-Lleida correspondiente a la línea de alta velocidad Madrid-Barcelona-Francia. Y en la actualidad existen diversas líneas de alta velocidad terminadas, en proyecto y en construcción, que harán que en poco tiempo la alta velocidad abarque prácticamente todo el territorio nacional. [3]

El 1 de enero de 2005 con la entrada en vigor de la Ley del Sector Ferroviario, RENFE desaparece como tal empresa y se segrega en dos nuevas empresas totalmente independientes: Renfe Operadora (integrada básicamente por las UU.NN. dedicadas al transporte tanto de viajeros como de mercancías) y el Administrador de Infraestructuras Ferroviarias (Adif, integrado básicamente por las UU.NN. dedicadas al mantenimiento de la infraestructura, terminales de mercancías, y circulación), que absorbe al Gestor de Infraestructuras Ferroviarias (GIF) creado en el año 2000. [3]

El tren, como se observa a lo largo de su Historia en España, ha reflejado no sólo los avances tecnológicos, sino que también recoge los desastres históricos y las evoluciones sociológicas. [4]

2.1.3 La Maquinista Marítima y Terrestre (MTM).

MTM fue fundada el 14 de septiembre de 1855 por Valentí Esparó, Nicolau Tous y Celedoni Ascacibar. Inicialmente, se instaló en la Barceloneta. El objetivo de esta empresa era la transformación del hierro para la fabricación de maquinaria y aportar productos metalúrgicos necesarios para la industrialización. [4]

La historia de la MTM cuajó rápidamente en la sociedad catalana. Así en 1827 el músico Anselm Clavé dio a conocer dentro de los conciertos matinales que se hacían en el Paseo de Gracia de Barcelona, la polca “La Maquinista” en la cual se promocionaba el trabajo que se hacía dentro de los talleres de la MTM. [4]

El creciente desarrollo del ferrocarril propició que la MTM rápidamente se especializase en la construcción de locomotoras de vapor (ver figuras 12 y 13). Entre 1883 y 1957 fabricaron 721. En 1917 trasladó los talleres al barrio de Sant Andreu del Palomar. A finales de los años veinte tenía capacidad para fabricar 6 locomotoras al mes. En 1989 La Maquinista se integró en el grupo GEC Alsthom y en 1992 libró las primeras unidades de trenes de alta velocidad construidos en España. En el 1994 los talleres de Sant Andreu se trasladan a Santa Perpetua de la Mogoda en el nuevo centro de GEC Alsthom que integra también MACOSA, otra empresa centenaria ligada a la industria ferroviaria. Hoy, todo el grupo se une bajo el nombre de ALSTOM. [4]

La Maquinista ha contribuido decisivamente al desarrollo del ferrocarril en España y durante sus 138 años de vida ha sido testimonio del paso de los acontecimientos más recientes: Monarquía, República, Guerra Civil, Dictadura y Democracia. Igualmente, ha sido una escuela de formación laboral y sindical. Actualmente, se trabaja en un museo histórico-social que recoja la huella de la Maquinista en el seno de la sociedad catalana y española. [4]

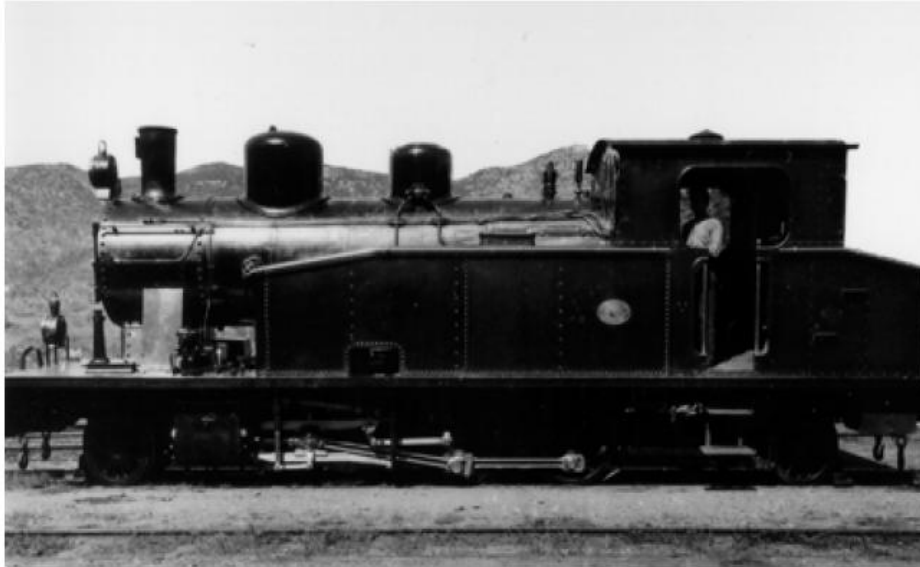


Figura 12. Locomotora-ténder 2-6-2 de la Compañía del Ferrocarril de Olot a Girona. Fabricada por la Maquinista Marítima Terrestre. 1926. Archivo Nacional de Cataluña.



Figura 13. Locomotora 2-4-0 serie 2400 fabricada en los talleres de MTM en 1940. Conocida popularmente como la "Linda tapada". Archivo Nacional de Cataluña.

2.2 Infraestructura.[3]

2.2.1 Introducción.

La infraestructura es el terreno base sobre el que se asienta la vía; también se denomina explanación o plataforma. La componen, aparte de numerosas obras de defensa (muros de contención y sostenimiento, drenajes, saneamientos, etc.), las denominadas obras de fábrica (túneles, puentes, viaductos, pasos a distinto nivel, etc.). Todo ello constituye el trazado del ferrocarril.

2.2.2 Obras de fábrica.

Se denominan obras de fábrica a aquellas que se realizan para salvar los obstáculos naturales del terreno. Entre ellas se pueden citar:

- **Viaductos:** utilizados cuando la distancia a cubrir es grande, debido a depresiones del terreno (ver figura 14).
- **Puentes:** son obras de fábrica o metálicas realizadas para salvar la dificultad de la orografía, con luz superior a ocho metros (ver figura 15).



Figura 14. Viaducto ferroviario.



Figura 15. Puente ferroviario.

- **Pasos a distinto nivel:** tanto superiores como inferiores que permiten el cruzamiento entre distintos viales ya sean carretera-ferrocarril o ferrocarril-ferrocarril (ver figura 16).
- **Pasos a nivel:** aunque realmente no es una obra de fábrica, pues el cruce de ambos viales es al mismo nivel, los podemos incluir en este punto (ver figura 17).
- **Túneles:** para el paso por zonas montañosas y para salvar zonas urbanas (ver figura 18).



Figura 16. Paso a distinto nivel.



Figura 17. Paso a nivel.



Figura 18. Túnel ferroviario.

2.2.3 Trazado.

El trazado se compone de:

- **Trazado en planta:** para proyectar dicho trazado se utilizan tramos rectos y curvos (arcos de circunferencia). A un tramo recto siempre le sigue uno curvo; y a uno curvo le puede seguir uno recto u otro curvo de diferente radio o dirección. En el punto de unión del tramo recto con el curvo aparecería instantáneamente la fuerza centrífuga en su máximo valor, originando gran peligro de descarrile para el material y pérdida de confort total para el viajero. Para subsanar este problema se intercalan arcos de unas curvas llamadas de transición que hacen que la fuerza centrífuga aparezca paulatinamente desde el valor cero al final de la recta, hasta el valor máximo al principio del arco de circunferencia. Existen diferentes tipos de curvas de transición, pero tanto en carreteras como en ferrocarril se utiliza la denominada Clotoide o Espiral de Cornu (ver figura 19), que no es, ni más ni menos, que la espiral en general conocida, y que tiene como principal característica la continua variación del radio. El mismo procedimiento se utiliza a la salida de las curvas o en la unión de dos curvas de diferente radio de curvatura.

Dentro del trazado en planta y con referencia a las curvas, no se puede olvidar la representación de los peraltes utilizados para contrarrestar la fuerza centrífuga.

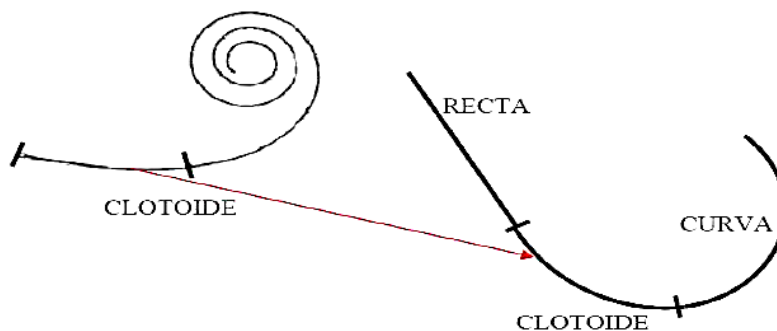


Figura 19. Clotoide.

- **Trazado en alzado o perfil longitudinal:** es una línea que une los diferentes planos, denominados rasantes, que componen el trazado de la vía, recogiendo las alturas sobre el nivel del mar, con expresión de la declividad en milímetros por metro (ver figura 20). Las rasantes pueden ser:
 - **Rampa**, que es el plano inclinado en sentido ascendente según el sentido de circulación.
 - **Pendiente**, que es el plano inclinado en sentido descendente según el sentido de circulación.
 - **Horizontal** cuando no existe declividad alguna.

El punto donde cambia la declividad se denomina cambio de rasante. Estos puntos están convenientemente señalizados en la línea férrea y además se indican en los libros horarios de los trenes. Las distintas rasantes se unen mediante curvas que se denominan acuerdos. Dependiendo de las rasantes que unan se llaman acuerdo convexo (rampa-horizontal, rampa-pendiente) o cóncavo (pendiente-horizontal, pendiente-rampa).

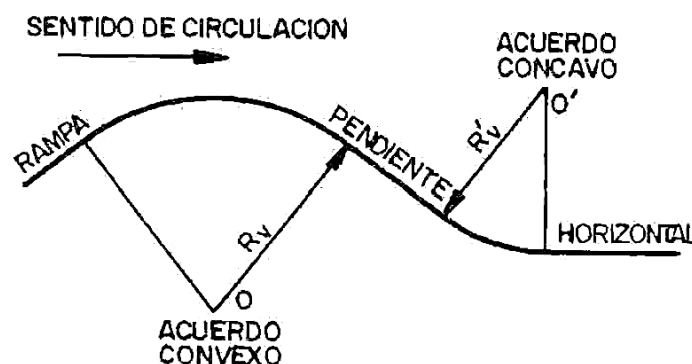


Figura 20. Ejemplo de determinación del perfil longitudinal de un trazado ferroviario.

- **Perfil transversal:** intersección de la plataforma con un plano vertical que es normal, en el punto de interés, al eje del proyecto. Se pueden distinguir diferentes tipos de explanaciones (ver figura 21):
 - **En trinchera**, en las que es necesario efectuar un vaciado de tierras.
 - **En terraplén**, en las que sucede todo lo contrario; necesitan aporte de material.
 - **Mixtas**, conjugación de las dos anteriores; se utilizan en vías que discurren por la ladera de una montaña.
 - **En línea**, que no requieren más que la correcta nivelación del terreno.

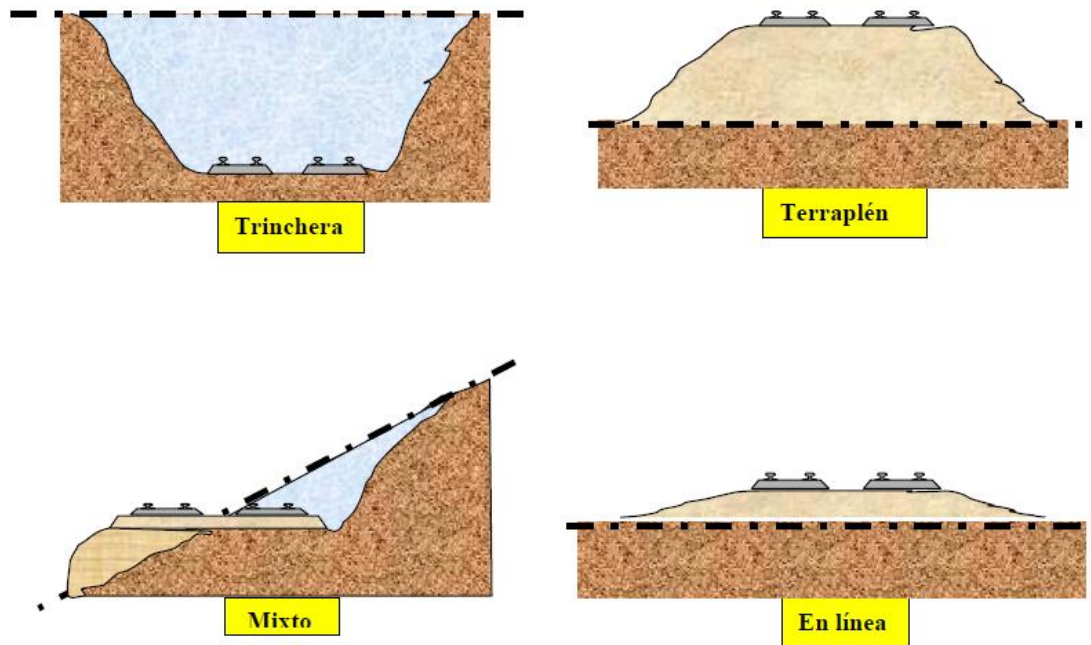


Figura 21. Tipos de explanaciones.

2.3 Superestructura. [3]

2.3.1 Introducción.

La superestructura comprende la vía propiamente dicha y el conjunto de aparatos e instalaciones necesarias para que los trenes puedan circular con garantías de eficacia y seguridad.

Lo primero que conviene destacar, en cuanto a la vía como superestructura se refiere, es el llamado ancho de vía. En España coexisten en la actualidad, a nivel Adif, dos anchos distintos: el ancho nacional o ibérico (1668 mm.), que conforma la Red convencional y también lo tienen los ferrocarriles portugueses, y el ancho internacional (1435 mm.) utilizado en las líneas de alta velocidad y en la mayor parte de los países europeos.

Se utilizan unas instalaciones llamadas **cambiadores**, que permiten que el material rodante, debidamente preparado para ello, pase en breves minutos de un ancho al otro.

2.3.2 La vía. [3 y 5]

La vía férrea, o simplemente la vía, es el conjunto que constituye el camino de rodadura de los vehículos ferroviarios. Sus funciones principales son el guiado del material rodante (es decir, los diferentes tipos de locomotoras, coches, vagones, etc.), gracias a la forma de las ruedas y a sus pestañas; y la sustentación de las cargas, ya que la vía debe transmitir y repartir las solicitaciones manteniendo la geometría del conjunto.

Así mismo, la vía debe de tener una serie de características fundamentales:

- **Flexibilidad**, ya que se busca la elasticidad para contraponer los efectos de la rigidez del contacto rueda-carril.
- **Resistencia** que permita soportar los esfuerzos longitudinales, verticales y transversales sin que se produzca el colapso plástico.
- **Continuidad del trazado del carril**, lo que obliga a tener en cuenta los efectos de las dilataciones térmicas en el diseño.

En la figura 22 se muestran los componentes de la vía.

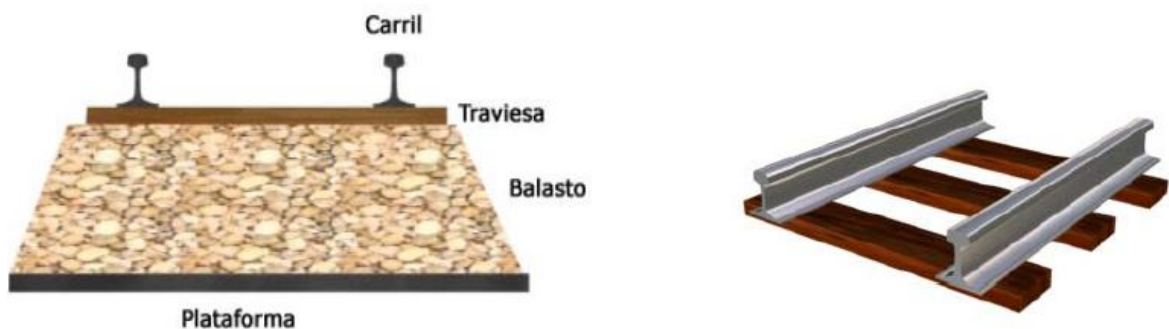


Figura 22. Elementos de una vía.

2.3.2.1 La plataforma.

La plataforma representa la base del camino de rodadura del ferrocarril sobre el que se asienta la superestructura. Es la parte más profunda de la estructura de la vía y soporta en último término todos los esfuerzos producidos por la marcha del tren, siendo sus funciones principales:

- Servir de estructura de apoyo.
- Soportar esfuerzos estáticos y dinámicos de trenes y vía.
- Evitar las deformaciones de la vía.
- Drenar y evacuar aguas para evitar sus efectos nocivos tales como la expansión de las arcillas y la contaminación del balasto, aumento del efecto de las heladas disgregando el material y cortes en la plataforma que tienen como consecuencia grandes hundimientos.

En la figura 23 se muestran los diferentes tipos de plataformas que pueden darse en función del terreno sobre el que pase el trazado ferroviario.

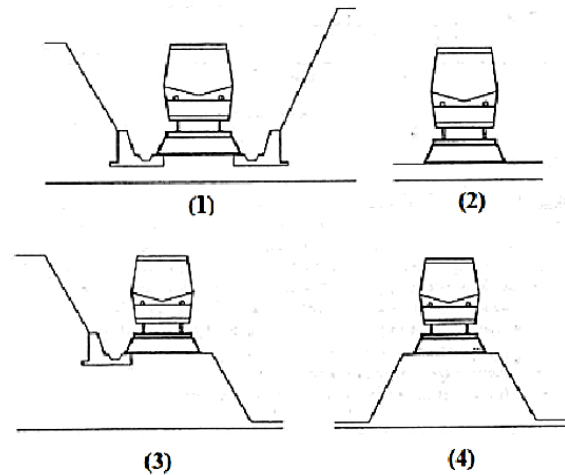


Figura 23. Tipos de plataforma: Trinchera o desmonte (1), a nivel (2), a media ladera (3) y terraplén (4).

2.3.2.2 Las capas de asiento.

Las **capas de asiento** incluyen el **balasto** y la **subbase** (ver figura 24). El balasto es un material granulado y grueso del que se coloca una capa entre el conjunto raíl-travesía y la capa de apoyo (la plataforma vista en el apartado anterior), siendo el elemento constructivo de las banquetas de gran parte de las líneas férreas, por lo que se le exigen las siguientes funciones:

- Soportar y distribuir las cargas que imponen las traviesas.
- Afianzar la vía impidiendo el movimiento lateral y longitudinal.
- Permitir, merced a su granulometría, el drenaje y la evacuación rápida de las aguas.
- Impedir que crezca la vegetación.
- Facilitar el mantenimiento (ajustes a la superficie y alineación).

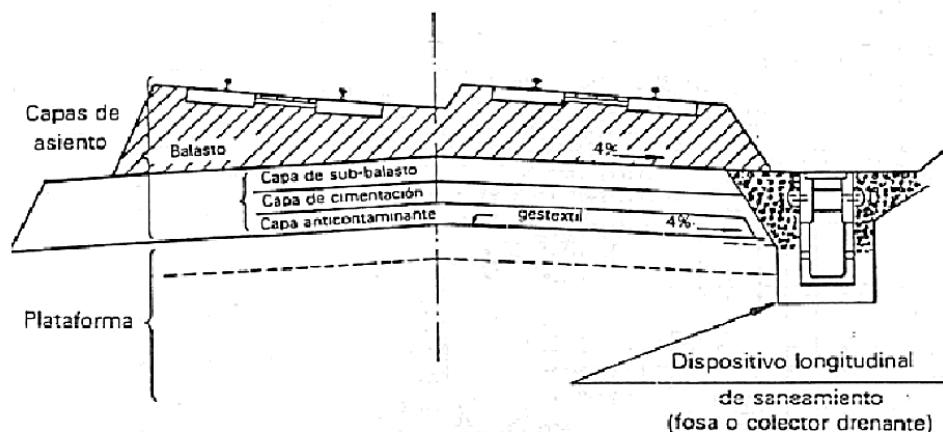


Figura 24. Capas de asiento.

En la sección de balasto, se utilizan los materiales más selectos (granito triturado, basalto, rocas ígneas, escoria, grava u otros materiales gruesos) debido a su mayor capacidad para soportar carga. Además, debe tener una determinada dureza a compresión y gran resistencia al desgaste para que la elasticidad del conjunto se mantenga el mayor tiempo posible.

Para obtener las características deseadas, las “piedras” del balasto deben tener aristas vivas, con el fin de mejorar el rozamiento interno. Deben poseer, también, forma poliédrica, nunca plana (lajas) o alargada (agujas).

Por otro lado, el balasto tiene que estar completamente limpio de finos, ya que éstos cerrarían el paso al agua y, evidentemente, la fricción entre los elementos del balasto no debe dar lugar a la formación de dichos finos, de ahí la resistencia al desgaste que se les exige.

La naturaleza de las rocas de las que procede el balasto debe ser tal que cumplan los siguientes requisitos:

- Que sean rocas homogéneas sin facilidad para disgregarse (no areniscas, pizarras o rocas sedimentarias similares).
- Que no sean rocas susceptibles a oxidación o ataque químico por agua, carbónico o sulfatos.

De este modo, en función de la calidad de las rocas de las que procede el balasto, éste se clasifica en Balastos A (rocas ígneas ácidas, plutónicas como el granito, volcánicas como el basalto y olifitas y filonianas como los pórfidos) o Balastos B (calizas duras). Los balastos de tipo A son bastantes caros por el coste de extracción, por lo que para banquetas de vías secundarias se utilizan balastos tipo B.

La contaminación por suciedad es el mayor problema de la capa de balasto. Esta contaminación tiene orígenes diversos, entre los que destacan los siguientes:

- Material arrojado por los vagones, material transportado por el viento o por la lluvia.
- Material pequeño generado bajo las traviesas por aplastamiento y trituración del balasto debido a la carga ejercida por el tráfico y la acción de la apisonadora.
- Posible penetración de material de subgrado cuando se rompe una capa vacía o cuando ésta no existe.

Como norma general, se puede considerar que resulta apropiado renovar el balasto cuando hay más del 30% de finos en la estructura o demasiadas partículas de tamaño menor a 22 milímetros. Asimismo, la limpieza del balasto es estrictamente necesaria cuando hay una contaminación superior al 40 % del balasto.

En cuanto a la **capa de subbase**, ésta se encuentra formada por:

- **Capas de subbalasto:** Formada por una grava arenosa compacta. Debe existir siempre y sirve para igualación y reparto.

- **Capa de cimentación:** Formada por gravilla anticontaminante compactada. Esta capa es para circulación en obra y puede suprimirse en plataformas resistentes.
- **Capa anticontaminante:** Formada por arena y se coloca solo en plataformas de baja calidad. Debe cumplir la inequación de Therzagui ($D(15) < d(85)$), es decir, sólo el 15% del material del filtro debe atravesar el tamiz que deja pasar el 85% del material filtrado.
- **Filtro anticontaminante:** Se coloca en las plataformas de media y baja calidad como elemento aislante entre la capa de forma de la plataforma y las capas de subbase. Evita la subida de finos de la plataforma a la subbase, mientras consigue el drenaje del 80% de las aguas cenitales. Pueden ser geotextiles o bien geomembranas plásticas. Los geotextiles cumplen la misión de anticontaminante y de drenaje de la superestructura junto a la mejora de la resistencia mecánica.

Las funciones de la capa de subbase son:

- Proteger la parte superior de la plataforma de la erosión que ocasionan tanto la penetración de elementos del balasto como del agua.
- Proteger a la plataforma del hielo.
- Mejorar el reparto de cargas transmitidas de forma que las solicitaciones que llegan a la plataforma estén limitadas a valores admisibles en función de la capacidad portante del suelo.

Las capas de subbase se proyectan con pendiente transversal hacia los dispositivos longitudinales de saneamiento en desmonte o hacia el exterior de la plataforma en zonas de terraplén. La pendiente transversal mínima es del 4% mientras que en zonas de fuertes peraltes es necesario a veces disponer una única pendiente que puede llegar al 8%.

Finalmente, hay que tener en cuenta que no todas las vías férreas cuentan con las capas de asiento antes descritas. Algunas de ellas cuentan con capas de asiento de hormigón o asfalto. Por ello, según el tipo de capa de asiento, las vías pueden ser clasificadas en:

- **Vía convencional o vía con balasto (VCB):** constituida por un lecho elástico de materiales incompresibles, que forman el balasto y demás capas de asiento sobre el que se sitúan las traviesas y sus correspondientes carriles y sistemas de sujeción.
- **Vía sin balasto o vía en placa (VSB):** constituida por una placa portante rígida de asfalto u hormigón (ver figura 25) sobre la que se sitúan las traviesas y sus correspondientes carriles y sistemas de sujeción. Surge como una solución a los problemas en vías comerciales al aumentar la velocidad de circulación de los trenes, buscando un sistema elástico, amortiguador, robusto, de mínima conservación y de poca sonoridad.

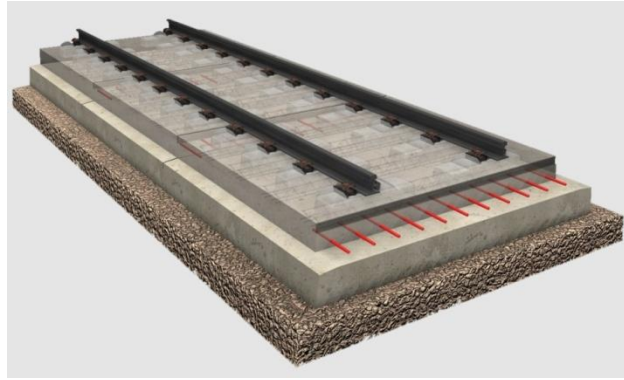


Figura 25. Vía sin balasto o vía en placa (VSB).

2.3.2.3 El carril.

El carril es el elemento resistente que recibe directamente las cargas de los elementos rodantes del vehículo, formando parte de la superestructura de la vía. Las funciones del carril se indican a continuación:

- Sustentación de cargas longitudinales, transversales y verticales, estáticas y dinámicas, transmitiéndolas a los otros elementos que componen la estructura de la vía.
- Conducción o guiado de los vehículos para que siga la trayectoria predefinida, y adhesión suficiente para el frenado y aceleración.
- Conducción de corriente de electrificación y señalización.

En la actualidad se utiliza el carril de patín plano (ver figura 26), derivado del conocido como carril de Vignole de 1836. El carril se puede dividir en las siguientes partes:

- **Cabeza:** es la parte del carril que constituye la superficie de rodadura con forma para que sobre ella se acomoden las ruedas de los vehículos y que, por tanto, está sometida a un importante desgaste. Su área de contacto es de orden de 1 cm^2 .
- **Alma:** debe transmitir las sollicitaciones exteriores desde la cabeza al patín.
- **Patín:** se caracteriza por la forma y espesor de las alas. Su principal función es transmitir las cargas a los otros elementos de la vía, ya que es la parte de contacto con dichos elementos, y conferir estabilidad y asiento al carril.

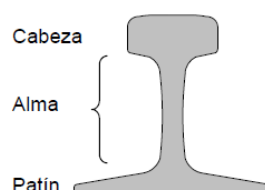


Figura 26. Esquema del carril.

2.3.2.4 Las traviesas.

Las traviesas son elementos que se sitúan en dirección transversal al eje de la vida, embebidas en el balasto, para permitir la fijación de los carriles. Deben aportar elasticidad, pero manteniendo la rigidez suficiente como para soportar las fuerzas que les transmiten los carriles, y evitar la transmisión de la corriente que pasa por ellas, función que cumplen perfectamente las traviesas de madera.

Existen tres tipos de traviesas:

- **Traviesas de madera:** son flexibles y elásticas, buenas para el aislamiento eléctrico y con buen comportamiento en el descarrilamiento. Tienen los inconvenientes de poseer una vida media de tan sólo 20 años y un peso inferior al de otras traviesas, lo que limita la velocidad.
- **Traviesas metálicas:** son ligeras, lo que produce problemas de estabilidad a altas velocidades o con tráfico pesado. Son ruidosas y tienen problemas de aislamiento. Se emplean en países con escasez de maderas de calidad, como la India.
- **Traviesas de hormigón:** a principios del siglo XX se desarrolla el primer diseño de este tipo de traviesas. En un principio, se utilizaba hormigón sin armadura lo que provocaba la aparición de roturas muy prematuras en la parte superior. Actualmente existen dos tipos de traviesas de hormigón (ver figura 27):
 - **Traviesa de hormigón bibloque:** se diseñó para evitar la distribución de la carga que producía la rotura prematura antes mencionada. Está formada por dos bloques de hormigón separados por una riostra de perfil de acero. De esta forma, el balasto no está en contacto con la traviesa en la parte central y, en definitiva, el hormigón no está sometido a tracción. Su comportamiento es bastante bueno y su único inconveniente es que el contacto con el balasto es limitado, por lo que no aguanta las fuerzas que se transmiten a altas velocidades.
 - **Traviesa de hormigón monobloque:** la superficie de contacto con el balasto es muy superior a la que presentan las bibloque, su capacidad de soportar y transmitir fuerzas es también mayor y los problemas de rotura prematura, al estar armada, son despreciables.

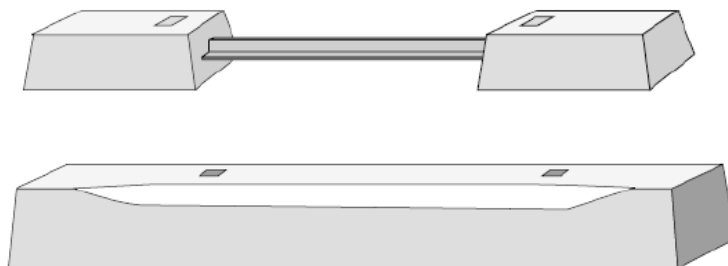


Figura 27. Traviesas de hormigón bibloque (superior) y monobloque (inferior).

2.3.2.5 Sujeción de las traviesas.

La sujeción debe soportar las fuerzas que se transmiten entre el carril y la traviesa y al mismo tiempo, debe aportar elasticidad al conjunto.

En la traviesas de hormigón, uno de los primeros problemas que se presentó fue el anclaje de la sujeción del carril, dada la nula clavabilidad del material. Este problema no aparece en las traviesas de madera.

Actualmente, en las traviesas de hormigón bibloque se usa un sistema de tornillo y casquillo tal y como se muestra en la figura 28.

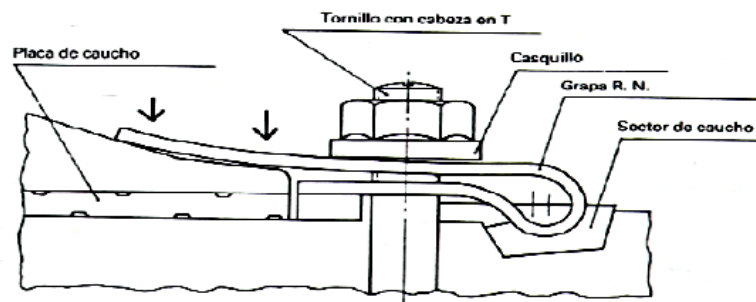


Figura 28. Sujeción de traviesas bibloque.

Por su parte, en las traviesas monobloque, se utilizan sistemas semejantes, pero intentando que las durmientes sean polivalentes, es decir, que puedan ser utilizadas indistintamente para ambos anchos, de la manera que se indica en la figura 29.

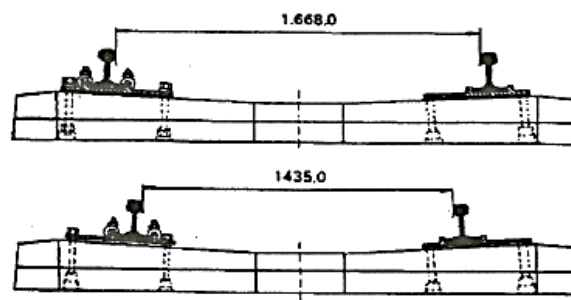


Figura 29. Sujeción de traviesas monobloque polivalentes.

2.3.3 Aparatos de la vía.

Los aparatos de la vía son los elementos que permiten el desdoblamiento de los carriles mediante unas piezas llamadas agujas. Una aguja se compone de una parte fija en la conexión de las dos vías que se llama corazón y de una parte móvil que permite el paso hacia una u otra vía, que se denomina espadín (ver figura 30).

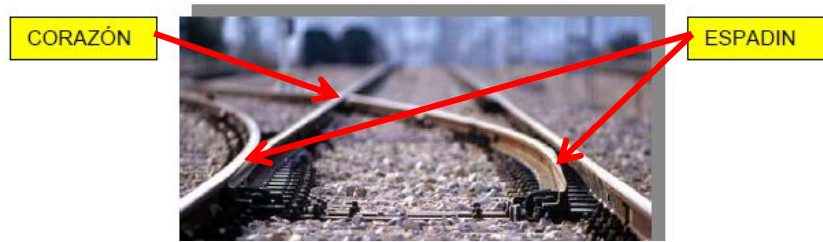


Figura 30. Aparatos de la vía: Corazón y espadín.

Dentro de los aparatos de vía tenemos:

- **Los desvíos** que permiten el desdoblamiento de una vía en dos (ver figura 31). Los hay de diferentes tipos según la velocidad máxima de paso por ellos. Cuando es necesario compatibilizar los dos anchos de vía, se utilizan los desvíos mixtos.



Figura 31. Desvío (izq.) y desvío mixto (dcha.).

- **La travesía**, que permite el cruzamiento de dos vías en oblicuo o perpendicularmente con continuidad de sus direcciones respectivas (ver figura 32).

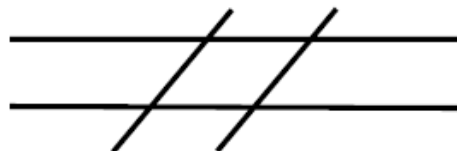


Figura 32. Travesía.

- **Combinación de aparatos de vía**, que lo constituyen, como su propio nombre indica, la combinación en la instalación de desvíos y travesías; con lo que se tiene el escape, la diagonal, el haz y el bretelle, tal y como se muestra en la figura 33.

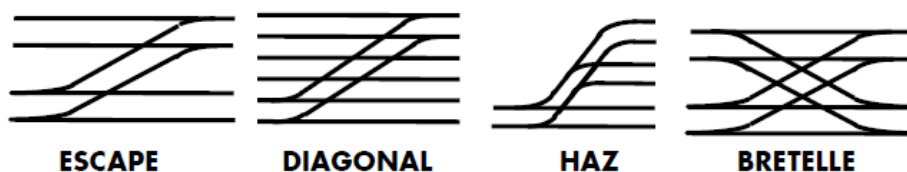


Figura 33. Combinación de aparatos de vía.

2.3.4 Cambios de agujas.

Para poder efectuar los cambios de vía a los que se han hecho referencia, se utilizan los cambios de aguja, entre los que se encuentran:

- **Cambios de agujas eléctricos:** accionados a distancia desde las estaciones o Centros de Control de Tráfico (CTC), tal y como se muestra en la figura 34.



Figura 34. Cambio de agujas eléctrico.

- **Cambios de agujas mecánicos:** accionados desde la estación mediante un cable de acero (ver figura 35).



Figura 35. Cambio de agujas mecánico.

- **Cambios de agujas manuales:** se accionan a pie de cambio. En la figura 36 se observa un elemento auxiliar que es el indicador de posición de aguja, que según su colocación indica si el cambio está hecho a vía directa o desviada.



Figura 36. Cambio de agujas manual.

2.3.5 Señales.

Las señales son los dispositivos empleados para transmitir mensajes desde la vía, estaciones y trenes. Estos mensajes se transmiten utilizando sonidos, colores y formas, de acuerdo con un código recogido en el Reglamento General de Circulación. Las más usuales son:

- **Semafóricas:** accionadas mecánicamente desde la estación mediante un cable de acero (ver figura 37).
- **Luminosas:** accionadas eléctricamente desde la estación o el CTC. Su aspecto es similar a los semáforos de carretera (ver figura 38).
- **Portátiles:** son las señales que puede utilizar o realizar el personal (normalmente el encargado de la regulación del tráfico) en cualquier momento (ver figura 39).



Figura 37. Señal semafórica.



Figura 38. Señal luminosa.



Figura 39. Jefe de estación con señal portátil.

- **De los trenes:** las que estos llevan por cabeza y cola (ver figura 40).



Figura 40. Señales de los trenes.

- **De limitación de velocidad:** dan ordenes, permanentes (fondo blanco) o temporales (fondo amarillo), tal y como se muestra en la figura 41.



Figura 41. Señales de limitación de velocidad.

2.3.6 Electrificación.

La electrificación de las líneas férreas se lleva a cabo mediante los elementos a través de los cuales toma corriente el material motor. Es de gran importancia su conocimiento dado su riesgo. En la actualidad los kilómetros de vía electrificada superan los 7.500. Las diferentes instalaciones que la componen son:

- **Subestación:** se encarga de transformar y, en la mayoría de los casos, de rectificar la corriente procedente de las suministradoras (llega a 30 o 40.000 voltios) para, a través de un conductor auxiliar denominado feeder (ver figura 42), transportarla al tendido eléctrico, para la correcta alimentación de las circulaciones con tracción eléctrica.

Para mejorar el comportamiento de la línea de contacto (catenaria), se dispone de una conducción en paralelo (línea de refuerzo). Parte de la corriente circula por la línea de contacto, y parte por la línea de refuerzo, uniéndose cada cierta distancia para mantener un valor más o menos constante de la tensión de catenaria cuando ésta descienda debido a las pérdidas por consumo de los vehículos que se encuentren en el tramo. Por extensión, también a estos cables que discurren de forma paralela a la línea aérea de contacto se les denomina feeder (ver figura 42).

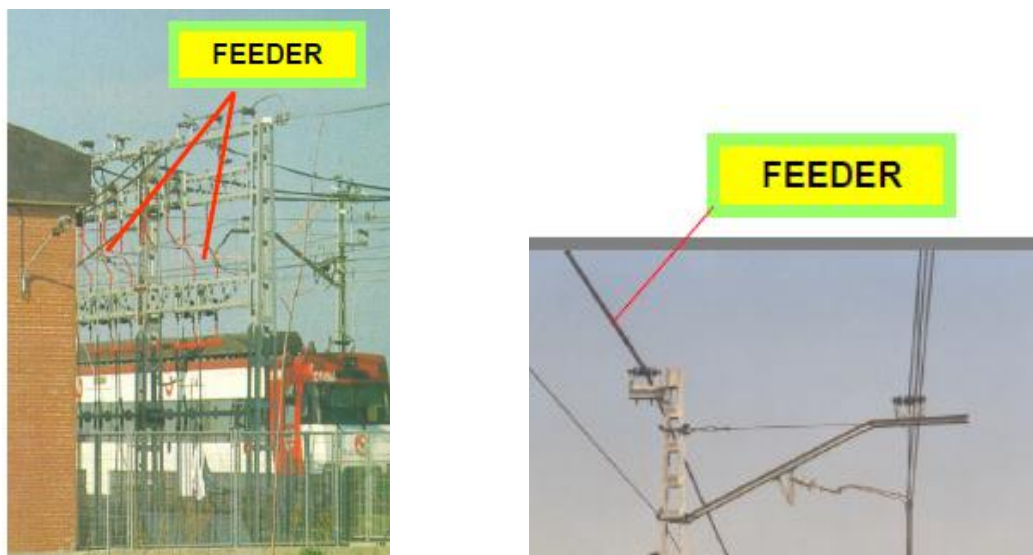


Figura 42. Feeder para el transporte de corriente (izq.) y Feeder paralelo a la línea de contacto (dcha.).

- **Columna de electrificación:** a continuación se muestran los diferentes conjuntos que componen una columna de electrificación y, en cada uno de ellos, los elementos integrantes:
 - **Conjunto de soporte** (sin tensión), mostrado en la figura 43, constituido por:
 - **Postes:** soportes metálicos o de hormigón verticales sobre los que se realiza el montaje de los equipos.

- Ménsula: soporte metálico unido al poste, encargado de sostener la catenaria.
 - Tirante: elemento de unión poste-ménsula que favorece el comportamiento mecánico del sistema.
 - Aislador de suspensión: pieza de porcelana o vidrio que sirve de aislante eléctrico.
- **Conjunto de atirantado** (con tensión), que se observa en la figura 43, formado por:
- Hilo de contacto o catenaria: cable del que toma la corriente el pantógrafo (siendo el pantógrafo la característica estructura situada sobre el material motor a través de la cual éste toma la corriente).
 - Brazo de atirantado: nexo de unión entre el hilo de contacto y el soporte, que permite el zigzag de la catenaria, a fin de aprovechar toda la longitud de la pletina del pantógrafo en su roce con la catenaria, haciendo que su desgaste sea uniforme.
 - Soporte de atirantado: mantiene unido el brazo de atirantado a la ménsula.
 - Aislador de atirantado: separa eléctricamente el conjunto de atirantado de la ménsula y poste.

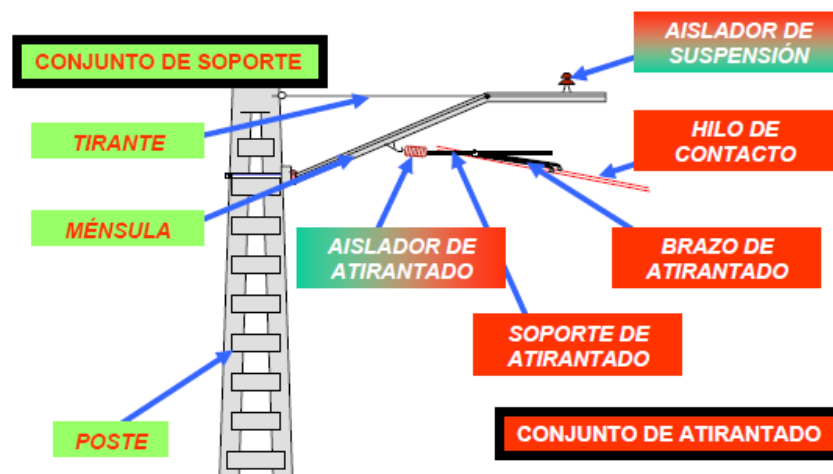


Figura 43. Conjunto de soporte y conjunto de atirantado.

- **Conjunto de suspensión** (con tensión), representado en la figura 44, compuesto de:

- Aislador de suspensión: separa eléctricamente la ménsula del conjunto de suspensión.
- Hilo sustentador: conductor que soporta los hilos de contacto de los que el material motor capta la corriente.
- Péndolas: conductores que permiten la unión mecánica y eléctrica entre el sustentador y el hilo de contacto, manteniendo éste último en un plano horizontal.

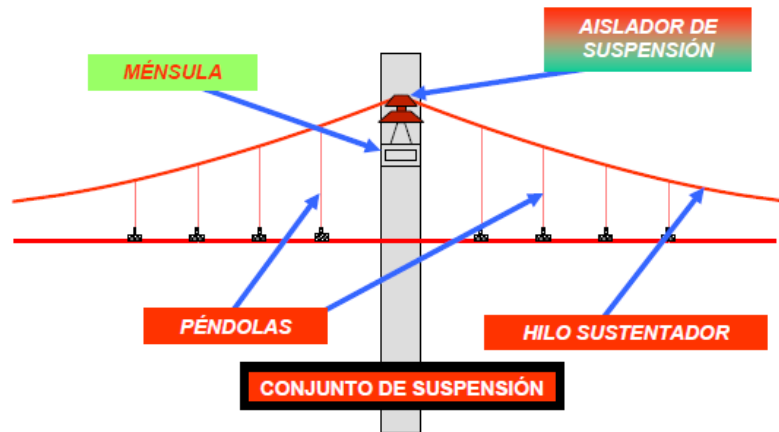


Figura 44. Conjunto de suspensión.

- **Conjunto de compensación** (sin tensión), que es el encargado de la regulación automática de la tensión mecánica de la catenaria, independientemente de la temperatura ambiental. A este último conjunto le dan forma una polea, un contrapeso y un aislador (ver figura 45).



Figura 45. Conjunto de compensación.

2.4 Enclaves ferroviarios. [3]

2.4.1 Introducción.

Los enclaves ferroviarios son las instalaciones necesarias para el funcionamiento del ferrocarril en todas sus facetas y que, según el nivel de prestaciones, va a recibir una u otra denominación (estaciones, apeaderos, intercambiadores de ancho, etc.).

2.4.2 Estación.

Las estaciones están constituidas por el conjunto de instalaciones de vías y agujas desde las que se coordina el tráfico ferroviario, tanto de trenes de viajeros como de mercancías y maniobras. Da servicio comercial a todo tipo de usuario del ferrocarril (ver figura 46).



Figura 46. Estación de Atocha, en Madrid.

Hay instalaciones que permiten manejar desde un único punto, a distancia, los servicios de varias estaciones de la línea. A esto se le denomina el Control de Tráfico Centralizado (CTC). Por su parte, la regulación del tráfico en el trayecto de una línea corresponde al puesto de mando.

2.4.3 Apartadero.

Los apartaderos son estaciones de poco tráfico de viajeros y cuyo objetivo fundamental es la regulación del tráfico ferroviario, posibilitando la realización de cruces de trenes, adelantamientos, etc. (ver figura 47).



Figura 47. Apartadero de Oropesa del mar (Castellón).

2.4.4 Apeadero.

Los apeaderos son dependencias con servicio exclusivo para la subida y bajada de viajeros. Son muy habituales en los grandes núcleos de población y no tienen personal (ver figura 48).



Figura 48. Apeadero.

2.4.5 Cargadero.

Los cargaderos son instalaciones de vías para la carga y descarga de vagones con enlace a una línea mediante una o más agujas de plena vía (ver figura 49).



Figura 49. Cargadero de carbón.

2.4.6 Terminales de mercancías.

Las terminales de mercancías son estaciones que, aparte de regular el tráfico, tienen como misión principal la prestación de servicios de mercancías.

Disponen de todas las instalaciones necesarias para la recepción, clasificación y formación, y expedición de los trenes de mercancías convencionales, que circulan entre ellas y/o a otros destinos nacionales e internacionales (ver figura 50).

Dentro de ellas puede hacerse mención especial a las terminales de mercancías para el tráfico de contenedores, cuya misión es la misma que las terminales de mercancías pero con la especialización del tráfico contenedorizable. Como es lógico estas estaciones se reparten por la red ferroviaria, en ciudades estratégicas del interior (Madrid Abroñigal), en fronteras (Portbou) y en puertos de mar (Bilbao).



Figura 50. Terminal de mercancías.

Capítulo 3

Material rodante ferroviario.

3.1 Introducción. [5]

Se denomina material rodante ferroviario a todo aquello que es apto para circular sobre las líneas ferroviarias. Se puede llevar a cabo la siguiente clasificación del mismo:

- **Material motor**, provisto de un motor para su autopropulsión y/o para la tracción de otro material rodante. Éste a su vez puede clasificarse en (ver figura 51):
 - **Material tractor**, provisto de motor para remolcar otro material rodante ferroviario, pero que no permite llevar carga útil sobre sí mismo (Locomotoras).
 - **Vehículo automotor**, provisto de motor y destinado al transporte, sobre sí mismo, de carga útil. Puede remolcar otros vehículos (Vagones tractores del Metro).
 - **Material auxiliar**, destinado a prestar servicio a los dos tipos de material motor descritos con anterioridad.



Figura 51. Material motor: material tractor (izq.), vehículo automotor (centro) y material auxiliar (dcha.).

- **Material remolcado**, que es el que, para su desplazamiento necesita ser enganchado a material motor. Se divide en (ver figura 52):
 - **Coche**, vehículo destinado al transporte de personas.
 - **Furgón**, vehículo destinado al transporte de equipajes.
 - **Vagón**, vehículo destinado al transporte de animales o cosas.
 - **Material auxiliar sin motor**, destinado a servicios auxiliares de la explotación ferroviaria.



Figura 52. Material remolcado: coche (izq.), vagón (centro) y furgón (dcha.).

Los elementos principales del material rodante, y que se describirán en los siguientes apartados son:

- Coches.
- Bogies.
- Ejes.
- Cajas de grasa.
- Placas de guarda.
- Elementos de suspensión.
- Ruedas.
- Motores de tracción.
- Equipo de freno.

3.2 Coches. [5]

Además de a un tipo de material remolcado, se denomina coche (ver figura 53) a la caja formada por una carrocería solidaria a un bastidor (material rodante rígido o sin bogies) o a una estructura autoportante (material articulado o montado sobre bogies).



Figura 53. Material rígido o sin bogies (izq.) y material articulado o montado sobre bogies (dcha.).

Los materiales con que se suelen fabricar las cajas de los coches de ferrocarriles metropolitanos son acero al carbono, aluminio o acero inoxidable, solándose utilizar, para el cálculo estructural de las mismas, la norma “Railway applications-structural requirements of railway vehicle body” o las normas ORE B12/RP17 (para cajas de aceros al carbono) y BS CP118 (para cajas de aluminio).

La unión entre los diferentes coches de un ferrocarril se pueden llevar a cabo mediante acoples de tope y cadena, de eslabón y perno (ver figura 54) o automáticos. Entre los acoples automáticos existen, a su vez dos versiones: la de Janney y la de Scharfenberg, mostrados ambos en la figura 55. El primero de ellos se utiliza para transportar grandes tonelajes (mercancías) y el segundo es el más común para el resto de usos, ya que permite conectar los sistemas eléctrico y neumático.

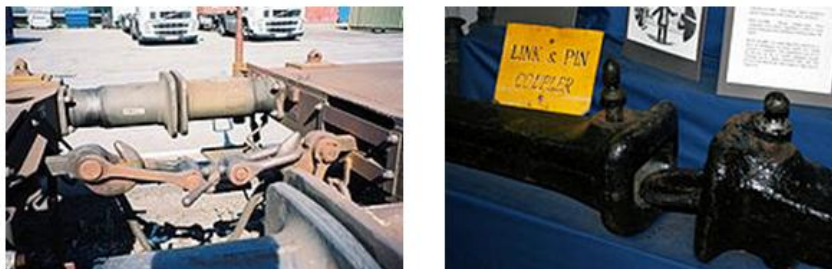


Figura 54. Acople de tope y cadena (izq.) y acople de eslabón y perno (dcha.).



Figura 55. Acoples automáticos de Scharfenberg (izq.) y Janney (dcha.).

3.3 Bogies. [5 y 6]

3.3.1 Introducción.

Un bogie es el conjunto de pares de ruedas montadas sobre ejes paralelos formando un carretón. Constituye el conjunto de rodadura mecánica que sustenta las cajas bien sea de locomotoras, de coches de viajeros, vagones de carga, coches de transportes ferroviario, etc. Es uno de los elementos más importantes junto con las propias cajas y los enganches.

Existen dos posibles tipos de bogies:

- **Bogies motor**, que incorporan los motores y mecanismos de tracción (ver figura 56).
- **Bogies remolcados**, tal y como se muestra en la figura 57.

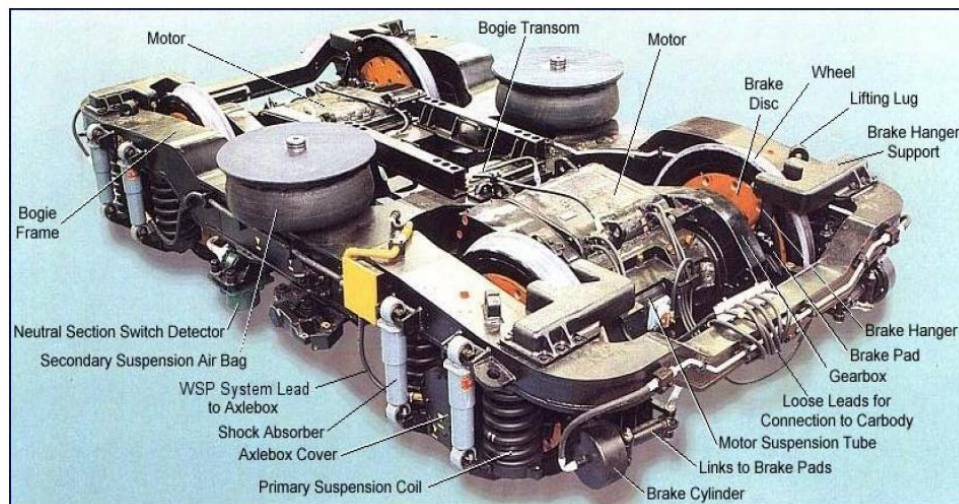


Figura 56. Bogie motor.



Figura 57. Bogie remolcado.

La evolución de dichos elementos ha sido consecuencia, en la mayoría de los casos, de la aparición de la Alta Velocidad y el propósito de no aumentar los esfuerzos verticales y, consecuentemente, el deterioro de la vía. Las diferencias fundamentales existentes entre los bogies de los trenes convencionales y de Alta Velocidad se reflejan en la tabla 1.

Tabla 1. Características de los bogies en trenes convencionales y de alta velocidad.

	Convencional	Alta Velocidad	Causa
Tipo de bogie	1 motor por eje (motor en el bogie)	1 motor por bogie (motor bajo la caja del vehículo)	Reducción del peso Mejor comportamiento frente a esfuerzos transversales
Peso	~18-13 t	~6 t (aleaciones de aluminio que reducen el peso)	Reducción de peso Mejor comportamiento frente a esfuerzos transversales
Distancia entre bogies	~18 m	~19 m	Mayor estabilidad
Empate	~2,5 m	~3 m	Mayor estabilidad transversal
Flexibilidad	12-16 t/mm	19 t/mm	Menor deterioro de la vía
Ubicación	Bajo la caja	Como elemento de enlace	Mayor espacio Mayor confort viajero

El bastidor de los bogies es una estructura metálica, normalmente de acero soldado, con unos requerimientos extremadamente exigentes que implican métodos de fabricación muy rigurosos, tanto de conformado de los palastros y chapas, como en sus soldaduras y procesos de homogeneización térmica de las mismas.

Las solicitudes a que se encuentran sometidos los bastidores de bogies aconsejan que, si bien su mantenimiento en el tiempo debe ser mínimo o nulo quedando reducido a operaciones de limpieza y repintado, si no hay otro tipo de problemas, se deba evitar cualquier daño en los mismos que pueda ser origen del comienzo de una grieta por fatiga. Así, se debe evitar golpear sus partes mecánicas, producir daños incisivos en soldaduras, soldar nuevos elementos a los mismos sin proceso de homogeneización térmica posterior, etc.

3.3.2 Historia, evolución y tipos de bogie.

Al hablar de la disposición de bogies, cabe mencionar que inicialmente la caja de los coches de viajeros iba soportada directamente por ejes. Las ventajas que traía consigo la utilización del bogie hicieron que, hacia principios del siglo XX, este dispositivo se desarrollara.

La seguridad, el confort o la propia velocidad dependen del sistema de rodadura, del que es parte integrante del bogie. A diferencia de los ejes, el bogie permite una mejor inscripción en curvas, un mejor reparto de cargas y el aumento de peso de los vehículos al repartir su peso entre mayor número de ejes. El bogie, además, atenúa el característico movimiento de lazo de los vehículos ferroviarios (ver figura 58), en relación con el vehículo de dos ejes.

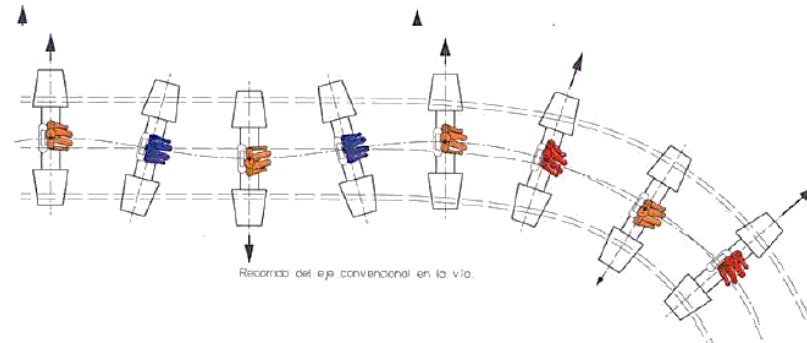


Figura 58. Movimiento de lazo.

El primer modelo de bogie fue el llamado "Diamond", fabricado y utilizado en EEUU y que todavía se puede ver en vagones de mercancías de Sudamérica. Con este modelo de bogie se consiguieron transportar cargas de 30 toneladas (siglo XIX), frente a las 10 toneladas de los ferrocarriles europeos de la época.

En torno a la década de los 60 aparecieron las nuevas generaciones de bogies: en Francia los tipo "Y-XX", en Alemania el "Minden - Deutz", bogies en los que las cajas de los ejes (cajas de grasa), en lugar de ser guiadas por mecanismos, son guiadas por bieletas de láminas flexibles u otros dispositivos sumamente ajustados y los desplazamientos transversales son controlados por amortiguadores hidráulicos o de fricción.

En 1971 RENFE, CAF y SIMAFE, investigan un bogie de alta velocidad y elevado confort, desarrollando un prototipo, con suspensión neumática que llamaron "bogie SIMAFE 2". Pese a los buenos resultados de las pruebas, no llegó a fabricarse, pero constituye el punto de partida de la serie GC (Gran Confort), ya que el GC1 es una derivación de dicho prototipo.

Ya sea por el gran salto tecnológico en comparación con la tracción directa a los ejes o porque casi todos los países con industria ferroviaria se decantaron por incorporar bogies, su uso se fue generalizando desde los comienzos del siglo XX, y en la actualidad resulta indispensable. Tiene además un importante impacto en relación con otros elementos de un tren, afectando a variables de tal importancia como: coste, seguridad, fiabilidad, ciclo de vida, peso, confort y velocidad.

La diversidad de bogies que surgieron en el ámbito ferroviario puede sintetizarse en cuatro familias principales:

- Wagons-Lits (1885-1930).
- Pennsylvania (1908-1970).
- Bogie Y28 y derivados (1967-actualidad).
- Gran Confort (1981-actualidad).

De estos tipos y sus variantes, en Europa han tenido una mayor repercusión el denominado Pennsylvania, y los franceses Y. El bogie Pennsylvania, se introdujo por el ferrocarril del mismo nombre y acabo exportándose también a Europa, incluida España, con los coches 5000. En este tipo de bogie, la barra de torsión que recoge la carga del vehículo, toma apoyo sobre dos grupos de muelles.

Todos estos bogies dieron buenos resultados para velocidades de 100 a 120 km/h, estando su límite de velocidad en 135 km/h. Para velocidades superiores era preciso otro tipo de bogie que conservara durante más tiempo sus características: que no tuviera juego o fuera muy reducido, que fuese capaz de absorber las deficiencias de vía, etc. Su uso generalizado en Europa empezó a desaparecer en coches nuevos hacia finales años 50, y su uso en explotación acabó en los 70.

Los bogies actuales para viajeros se designan con la nomenclatura francesa mediante la letra Y seguida de un número correlativo (impar si se trata de bogies para vagones de mercancías). Los bogies de nueva generación corresponden a los designados como Y28 y siguientes, siendo destacable el Y32 por ser uno de los más utilizados en la actualidad.

En España ha sido muy importante la familia de los bogies Gran Confort, que nace en 1981, montándose los GC1 en los coches "Corail" alquilados a la SNCF (operadora ferroviaria nacional de Francia). Después se montaron de forma masiva en los coches de las series 9.000 y 10.000.

El bogie GC3A, fue el último de la familia Gran Confort y, sin lugar a dudas, el más evolucionado técnicamente. Tiene el bastidor en forma de "H" y es de chapa de acero, formando secciones en cajón cerrado, los largueros tienen en su parte central un alojamiento reforzado para los muelles de la suspensión secundaria, en el bastidor están también los soportes de los equipos de freno. La unión caja-bogie se realiza por medio de una traviesa de unión y una traviesa de caja, y la unión entre ambas se efectúa por medio de dos pitones de anclaje.

3.3.3 Diseños habituales del bogie en un vehículo de pasajeros.

Los diseños más comunes de vehículos de pasajeros utilizan un par de bogies de dos ejes para cada coche. Sin embargo, en los trenes articulados, por ejemplo el TGV francés, se colocan los bogies de doble eje entre las carrocerías de los coches, mientras que los trenes TALGO españoles utilizan un bogie con eje articulado sencillo. Para los bogies de viajeros, los ejes montados (posteriormente se analizará este concepto) se instalan generalmente en un bastidor rígido en forma de H que divide la suspensión en dos etapas, primaria y secundaria.

3.3.4 Tracción concentrada y distribuida.

Es de interés destacar que aun cuando los primeros trenes de alta velocidad en Europa fueron todos con tracción concentrada, el desarrollo del posterior tren alemán de alta velocidad ICE dio paso a la tracción distribuida.

El significado práctico de ambos conceptos puede sintetizarse indicando que, en el primer caso, sólo los bogies bajo la tractora transmiten los esfuerzos (o en todo caso sólo los bogies del primer coche remolcado). Son ejemplos de ello el ETR 500 y el TALGO 35, entre otros. En la segunda opción, los bogies tractores se distribuyen, total o parcialmente, a lo largo del tren tal como sucede con el ICE. Los trenes japoneses de alta velocidad son también de tracción distribuida.

3.4 Ejes. [5]

En el eje de un vehículo ferroviario se distinguen tres partes principales (ver figura 59):

- **Fuste o cuerpo** del eje comprendido entre ambas ruedas.
- **Secciones de calaje** sobre las que se calan o calzan las ruedas.
- **Manguetas**, sobre las que reposan los cojinetes de las cajas de grasa, que a su vez soportan el peso suspendido del vehículo.

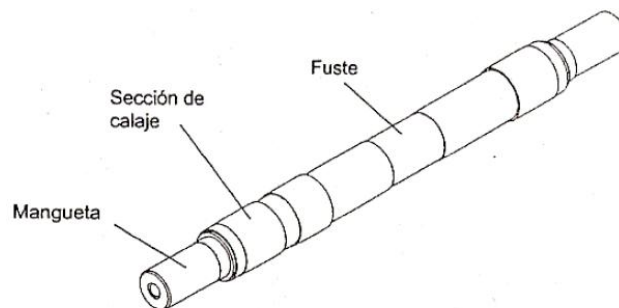


Figura 59. Partes de un eje ferroviario.

Los problemas de fatiga que presentaban los ejes han hecho que se elaborasen normativas específicas para el diseño de los mismos. Las fases de diseño implica (UNE-EN 13103) la identificación de las fuerzas y cálculo de los momentos en diversas secciones y la selección de los diámetros para el cuerpo y las manguetas. El resto se dimensionan a partir de éstos.

Se denomina **eje montado** al conjunto de un eje y sus dos ruedas, caladas con arreglo a las especificaciones en vigor para cada ferrocarril (ver figura 60). Además del perfecto equilibrado de cada rueda, el centro de gravedad del eje montado ha de coincidir con el teórico, ya que en otro caso, y sobre todo si el eje fuera motor, la resultante del esfuerzo de tracción daría lugar a un par que alabearía el eje, forzando las pestañas contra el carril.

Todos estos conceptos se analizarán en detalle en el capítulo 4.

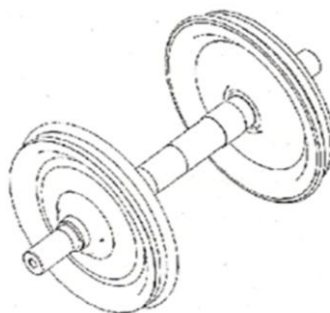


Figura 60. Eje montado.

3.5 Cajas de grasa. [5, 6 y 7]

Para asegurarse la unión eje-bogie y facilitar la rodadura de los ejes, se dispone de un elemento llamado **caja de grasa** (ver figura 61). La caja de grasa es el dispositivo que permite que el eje montado rote, lo que implica que las partes metálicas en contacto estarán lubricadas adecuadamente para disminuir el rozamiento así como el calentamiento del eje. Además, permite transmitir los esfuerzos de frenado desde los ejes a la masa del vehículo. Así, la caja de grasa es el dispositivo que permite al eje montado rotar incluyendo el alojamiento del rodamiento y también los soportes para la suspensión primaria sujetando el eje montado al bogie o cuerpo del vehículo.

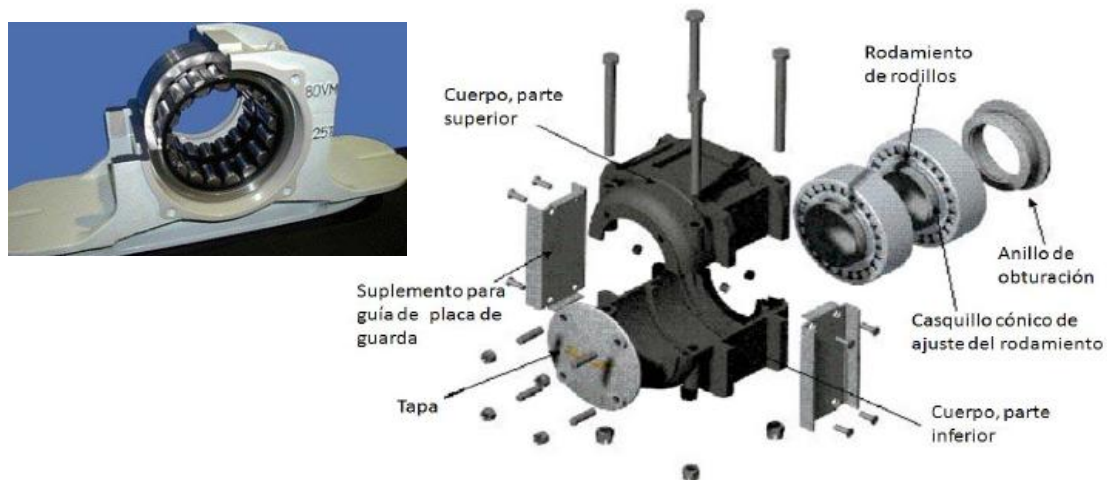


Figura 61. Caja de grasa.

La caja de grasa transmite las fuerzas longitudinales, laterales y verticales desde el eje montado a los otros elementos del bogie, clasificándose según:

- Su posición en el eje, dependiendo si los rodamientos están en la parte interior o exterior.
- El tipo de rodamiento usado, de rodillos o planos (de fricción).

La forma externa de la caja de grasa se determina por el método de la conexión entre la caja de grasa y el cuerpo del bogie y está dirigida a conseguir una distribución de fuerzas uniforme en el rodamiento. La construcción interna de la caja de grasa está determinada por el rodamiento y su método de sellado.

Las cajas de grasa con rodamientos planos (ver figura 62) consisten en el alojamiento (1), el propio rodamiento (2) que normalmente se fabrica de aleaciones con bajo coeficiente de fricción (bronce o metal blanco), la carcasa del rodamiento (3) que transmite las fuerzas desde la caja de grasa al rodamiento y un dispositivo de lubricación (4) que lubrica el eje del rodamiento. Los precintos frontal y trasero (5 y 6) previenen de la suciedad y de cuerpos extraños dentro de la caja de grasa. El precinto frontal puede retirarse para comprobar el estado del rodamiento y añadir lubricante.

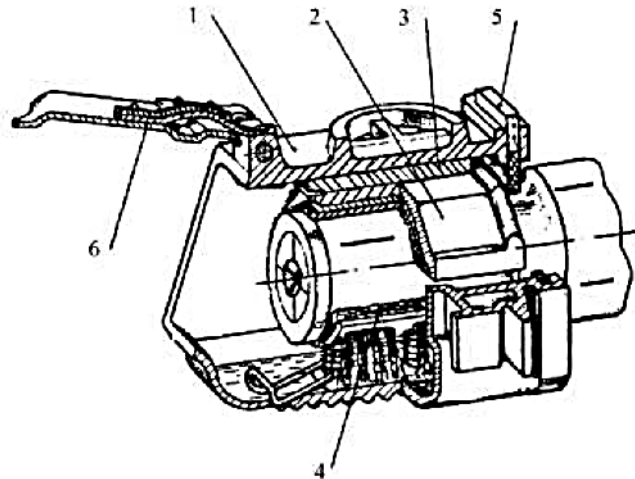


Figura 62. Caja de grasa con rodamientos planos.

En las cajas de grasa de fricción las fuerzas verticales y longitudinales se transmiten a través de la superficie interna del rodamiento y las fuerzas laterales por sus caras. Actualmente se están quedando obsoletas ya que tienen varias desventajas importantes:

- Elevado coeficiente de fricción cuando se parte del reposo.
- Poca fiabilidad.
- Una labor de mantenimiento muy intensiva.
- Contaminación con el medio.

Sin embargo, desde el punto de vista del comportamiento dinámico del vehículo, tienen ciertas características positivas. En los años recientes, se han introducido cajas de grasa con rodamientos planos que no requieren lubricación en ciertos tipos de material rodante, aunque su uso es todavía minoritario.

En cuanto a las cajas de grasa con rodamientos de rodillos (figura 63) se clasifican según:

- El tipo de rodamiento (cilíndrico, cónico, esférico).
- El método de ajuste (ajuste por presión, ajuste por calentamiento).

El principal factor que determina la construcción de la caja de grasa es la forma en que soporta la fuerza axial y distribuye la carga entre los rodillos.

Los rodamientos de rodillos cilíndricos tienen una elevada capacidad dinámica en la dirección radial, pero no transmiten fuerzas axiales. La experiencia en la operación de material rodante ferroviario muestra que las caras de los rodillos pueden resistir fuerzas laterales. Sin embargo, para hacer esto satisfactoriamente, es necesario regular no sólo el diámetro sino también la longitud de los rodillos y la holgura, tanto radial como axial.

Por su parte, los rodamientos de cilindros cónicos transmiten fuerzas axiales a través de la superficie cilíndrica debido a su inclinación para la rotación del eje. De esta manera es

necesario mantener las tolerancias en los diámetros de las bolas y las holguras casi un orden de magnitud más ajustadas que para rodamientos cilíndricos. Además, los rodamientos cónicos tienen elevados coeficientes de fricción comparados con los rodamientos de rodillos y, por tanto, generan más calor. Esto no sólo incrementa el consumo en la tracción, sino que también crea dificultades para los diagnósticos de las unidades de la caja de grasa durante el movimiento.

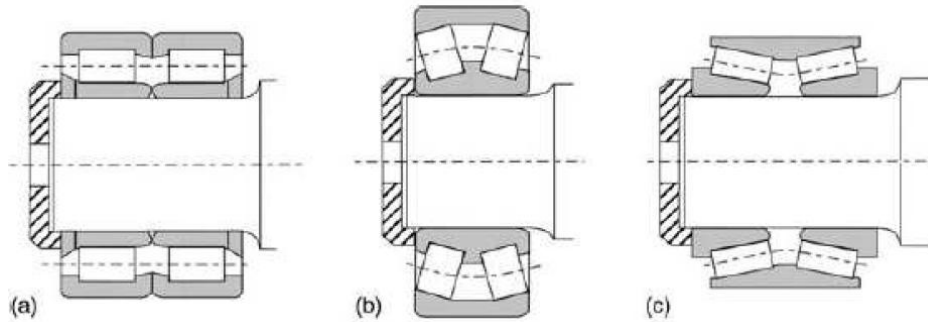


Figura 63. Rodamientos de rodillos (a) cilíndricos y (b y c) cónicos.

Los rodamientos de bolas no han sido utilizados de manera extensa debido a su elevado coste y baja capacidad de carga, aunque tienen una ventaja significativa: su mejor distribución de carga. Éstos, sin embargo, están en muchas ocasiones combinados con rodamientos de rodillos en aplicaciones ferroviarias.

Así, el material rodante de alta velocidad a menudo tiene tres rodamientos en la caja de grasa: dos transmitiendo de rodillos y uno de bolas (ver figura 64).

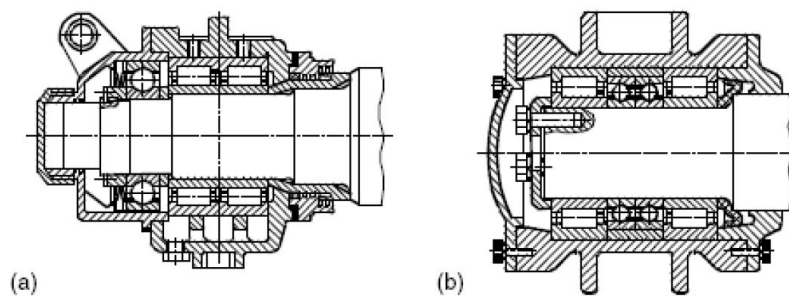


Figura 64. Uso de rodamientos de bolas: (a) rodamientos triples de trenes de alta velocidad en Japón y (b) rodamientos triples de trenes de alta velocidad en Francia

Actualmente, los rodamientos utilizados disponen de una jaula de material compuesto, y van lubricados con elementos de cierre lateral que permiten asegurar una vida de funcionamiento elevada. Además de estas mejoras, se están empleando, cada vez más, rodamientos sensorizados que permiten medir la velocidad de giro, detectando posibles bloqueos de rueda, así como la temperatura. Con esta instrumentación se mejora el control del tren y el mantenimiento de los rodamientos.

3.6 Placas de guarda. [5]

Las placas de guarda (figura 65) son piezas en forma de horquilla, unidas a los largueros del bastidor del bogie y entre cuyos brazos o guías deslizan las cajas de grasa. Funcionan esencialmente como aparato de seguridad, cuyo objeto es mantener las cajas de grasa en su posición normal y sujetar el eje en caso de avería del muelle de suspensión.

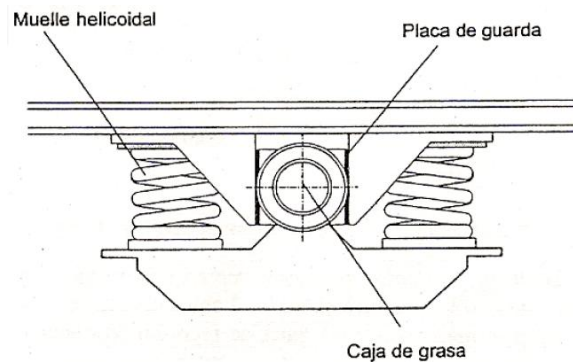


Figura 65. Placas de guarda.

Es necesario que en el sentido longitudinal del vehículo se deje a la placa de guarda un juego suficiente en las guías de las cajas, condición que se precisa para facilitar el paso en las curvas y para que no sea la placa de guarda, sino el resorte, es decir, un intermedio elástico, el que transmita al bastidor del vehículo los choques que reciben las cajas.

Este juego longitudinal depende esencialmente del radio de las curvas de la línea y de la máxima separación entre los ejes extremos del vehículo o base rígida de éste. Sin embargo, precisa asegurarse que este juego no exceda, por desgaste de las guías, los límites admisibles para evitar la posible salida del eje y movimientos anormales de lazo en el vehículo. Por este motivo, el desgaste admitido en los ferrocarriles españoles no excede de 5 mm por cada lado de la caja de grasa.

3.7 Elementos de suspensión. [5 y 8]

3.7.1 Introducción.

El sistema de suspensión de un vehículo ferroviario es el encargado de soportar el peso del vehículo, permitir su movimiento elástico controlado sobre sus ejes y de absorber la energía producida por las irregularidades de la vía para mantener la estabilidad del mismo, proporcionando mayor confort y seguridad a los pasajeros y/o carga que se transporta.

Además, dicho sistema de suspensión debe garantizar la protección de los componentes del tren así como de la vía sobre la que circule, cualesquiera que sean el estado de ésta y las

condiciones de utilización. De la misma forma la estabilidad del ferrocarril debe mantenerse independientemente del tipo de obstáculos, de los desniveles de la ruta, del radio de viraje y de la pendiente. También debe garantizarse la comodidad de los pasajeros y la protección de las mercancías transportadas, reduciendo en cuanto sea posible los movimientos verticales, longitudinales, transversales y angulares de la parte suspendida.

El sistema de suspensión suele estar ubicado entre el suelo y el bastidor y está constituido genéricamente por los mismos componentes para todo tipo de vehículos, diferenciándose en sus tipos y dimensiones de acuerdo a las prestaciones y función de cada tren.

Las suspensiones constituyen un aspecto fundamental del diseño mecánico de cualquier vehículo. Sin embargo, en la mayor parte de ellos el diseño de la suspensión afecta también a otras prestaciones. Así, en los vehículos ferroviarios el diseño de la suspensión influye sobre la estabilidad estática y dinámica y sobre los esfuerzos rueda-carril, tanto en circulación en curvas como por tramos rectos.

Como consecuencia de su influencia sobre otras prestaciones, el diseño de una suspensión no puede realizarse atendiendo exclusivamente a uno de los aspectos afectados por ella. Por tanto, no es de extrañar que, generalmente, las soluciones alcanzadas sólo constituyan un compromiso que más o menos tiene en cuenta los imperativos a satisfacer.

3.7.2 Componentes de la suspensión.

En la suspensión de un vehículo ferroviario existen diferentes tipos de elementos que permiten asegurar las funciones de confort, estabilidad, seguridad y calidad de marcha. De forma general, estos elementos pueden dividirse en elásticos y amortiguadores. Los primeros garantizan la unión entre los órganos de rodadura y el vehículo, aportando una fuerza recuperadora cuando se produce alguna separación entre ellos. Los segundos son elementos disipadores de energía que hacen que decaiga el movimiento oscilatorio provocado por cualquier tipo de perturbación que actúe sobre la suspensión. Dependiendo del sistema de suspensión utilizado, algunos elementos cumplen la doble función de ser elementos elásticos y de amortiguamiento.

Si se considera un ferrocarril desplazándose sobre un terreno horizontal, la situación ideal sería la que le permitiera avanzar sobre la superficie de dicho terreno sin que se produjese ninguna oscilación en la caja del vehículo. Ahora bien, si existe una unión entre las ruedas y la caja del tren, cualquier irregularidad del terreno se transmitirá a ésta y alterará su movimiento. Sin embargo, dicha unión es necesaria si se desea que el vehículo y ruedas sigan un recorrido común. Como consecuencia, la transmisión de vibraciones a la caja resulta inevitable.

Existen diferentes formas de conseguir la rigidez y amortiguamiento requeridos en una suspensión. Desde la aparición de los primeros ferrocarriles han sido muchos los elementos utilizados para ello. En los siguientes apartados se mostrarán los sistemas de mayor éxito y que siguen en funcionamiento en nuestros días.

No obstante, para la comprensión de dichos apartados, se debe considerar que en cualquier sistema de suspensión existe:

- **La masa suspendida**, que es la parte de la masa total que es soportada por el sistema de suspensión. Está constituida por chasis, grupo motor, carrocería, carga del vehículo, etc.
- **La masa no suspendida**, formada por el sistema de suspensión y los elementos que conectan dicho sistema con la vía sobre la que circula el vehículo, como son ejes, ruedas, frenos del vehículo (si están incluidos fuera del chasis), elementos de transmisión, etc.

3.7.2.1 Ballestas.

La ballesta es uno de los componentes de suspensión más antiguo y que todavía perdura debido a sus ventajas de:

- Economía.
- Amortiguamiento propio.
- Capacidad para soportar grandes cargas.
- Realización de funciones adicionales de guiado lateral y longitudinal.

La descripción del resorte de láminas o ballesta se puede visualizar en la figura 66. Este tipo de resorte está formado por una serie de láminas de acero superpuestas.

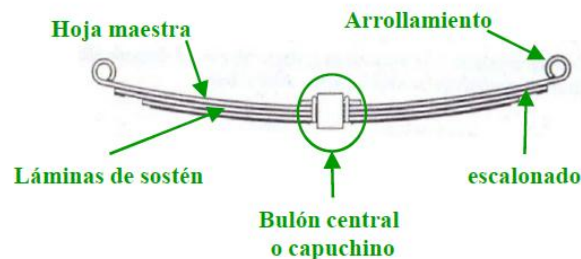


Figura 66. Ballesta.

La lámina principal, la más larga, se llama lámina u hoja maestra, terminando generalmente en uno o dos arrollamientos para formar un ojo que sirve para su fijación. A veces la lámina maestra está sostenida, hasta debajo de los puntos de apoyo, por una segunda lámina, que entonces se llama lámina submaestra. Las otras láminas o láminas de sostén son de longitudes desiguales, llamándose a la parte no sostenida de una lámina el escalonado.

Las láminas están ensambladas entre sí por un bulón central o capuchino y generalmente son de anchura y grueso constante. Sin embargo, la lámina maestra a veces es de mayor grosor que las otras, al tener que resistir esfuerzos de todas clases como consecuencia de los movimientos verticales, longitudinales y transversales de la parte suspendida con respecto a la no suspendida.

Los extremos de las láminas de sostén son rectangulares, de forma trapezoidal o parabólica y a veces, progresivamente, adelgazadas en la longitud de la parte escalonada. La curvatura de las láminas crece a medida que la longitud disminuye, a fin de evitar divergencias entre los extremos de cada una de ellas. La diferencia de curvatura, sin embargo, no debe ser exagerada a fin de evitar fatigas excesivas en las láminas más alejadas de las maestras. El desplazamiento lateral de las láminas entre sí es impedido mediante bridas o abrazaderas, estando guiado el deslizamiento de las láminas de sostén.

En vehículos ferroviarios las ballestas se utilizan en trenes de mercancías debido a su gran capacidad de carga. En este caso el montaje se realiza mediante dos anillas, colocadas cada una en un extremo de la ballesta.

Se suelen utilizar ballestas de doble flexibilidad, en las que parte de las hojas comienzan a deformarse a partir de una determinada carga. De esta forma, se consigue que la frecuencia natural de la suspensión no cambie demasiado entre las condiciones de tara y carga máxima y, por otra parte, en vehículos ferroviarios se asegura una deformación elevada hasta descarga completa de ruedas, lo cual es una condición necesaria para evitar riesgos de descarrilamiento.

Estos dos últimos conceptos se representan en la figura 67, donde se observan las ballestas como parte del sistema de suspensión de un vehículo ferroviario.

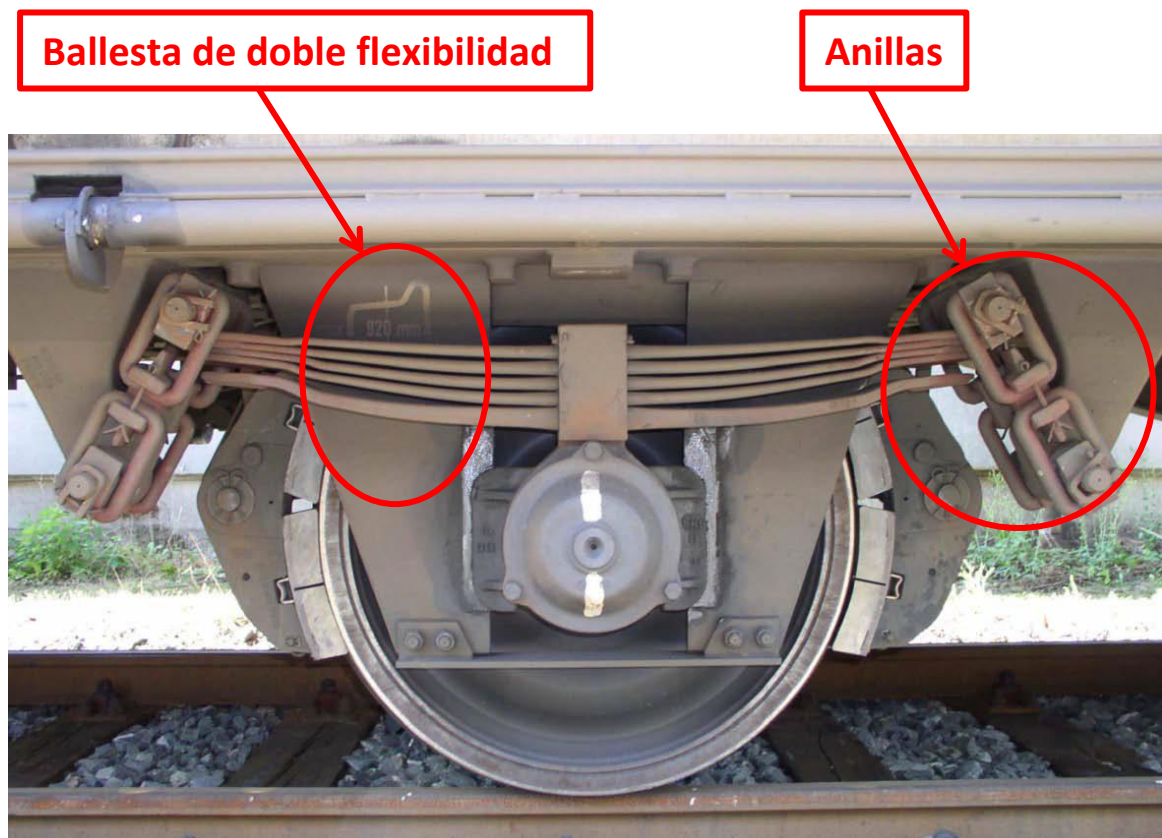


Figura 67. Ballesta integrada en el sistema de suspensión de un vehículo ferroviario.

3.7.2.2 Resortes helicoidales.

Los resortes helicoidales (ver figura 68) son una varilla o barras de acero de alta resistencia que forman una hélice de diámetro y paso constante o variable. Trabajan a flexión sin presentar ningún tipo de amortiguamiento importante, por lo que van siempre asociados a algún disipador externo. Presentan las ventajas de ser más compactos que las ballestas y de tener una regulación más precisa que éstas.



Figura 68. Resortes en un bogie Y25.

En algunos vehículos es habitual utilizar resortes montados concéntricamente uno dentro de otro (lo que es equivalente a dos resortes en paralelo), instalándose, en ocasiones, con altura libre diferente, de forma que uno de ellos comienza a deformarse, una vez que el otro ha alcanzado ya una cierta deformación (misma función que la ballesta de doble flexibilidad), tal y como se muestra en la figura 69.

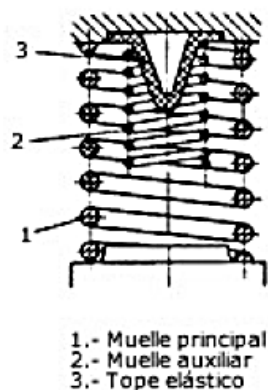


Figura 69. Resortes concéntricos en paralelo.

Los muelles helicoidales de fleje (ver figura 70), son un caso particular de los muelles anteriores, y presentan un comportamiento no lineal. Se han utilizado muy extensamente por diferentes administraciones como suspensión primaria en coches de viajeros.

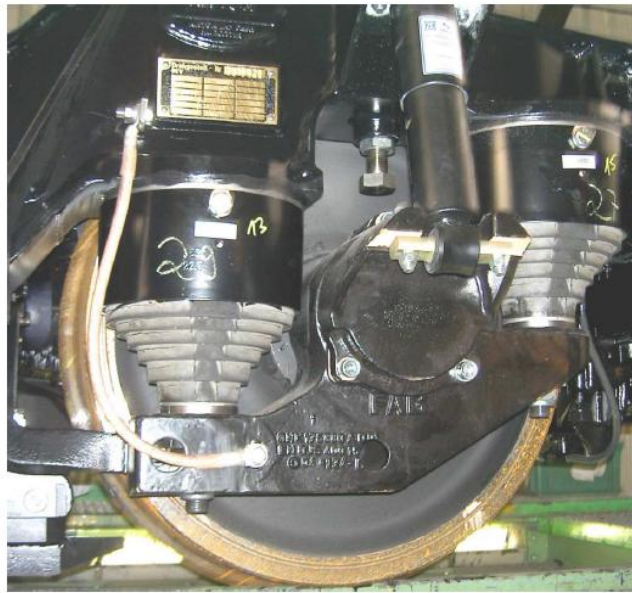


Figura 70. Resortes helicoidales de fleje.

3.7.2.3 Barras de torsión.

Las barras de torsión (figura 71) son dispositivos que, debido al ablandamiento de la suspensión vertical, se van incorporando a la suspensión de un gran número de vehículos ferroviarios.



Figura 71. Brazo de torsión.

Su misión consiste en disminuir el ángulo de balanceo experimentado por el vehículo cuando recorre una curva. Dicho ángulo, además de provocar una mayor fuerza lateral sobre los viajeros (se incrementa la fuerza centrípeta con la componente de la gravedad paralela al piso del vehículo), provoca un desplazamiento lateral del centro de gravedad que tiende a reducir la carga en las ruedas interiores y a aumentarla en las exteriores, lo que incrementa el riesgo de vuelco del vehículo.

En el caso de vehículos ferroviarios, la reducción de la fuerza lateral experimentada por los viajeros permite incrementar la velocidad de paso por las curvas, limitada por este motivo debido a razones de confort.

3.7.2.4 Resortes de elastómeros.

La utilización de resortes de elastómeros resulta muy frecuente como suspensiones de maquinaria, motores etc., en las que es necesario filtrar vibraciones de alta frecuencia asociadas con desplazamientos relativamente pequeños. La mejora de la tecnología de producción de estos elementos ha facilitado su utilización en suspensiones de vehículos. Fundamentalmente sus aplicaciones se centran en vehículos ferroviarios o como elementos accesorios de las suspensiones principales de los automóviles. En la figura 72 se muestra una suspensión de muelle de elastómeros utilizada para soportar cajas de grasa en la suspensión primaria de algunos ferrocarriles.

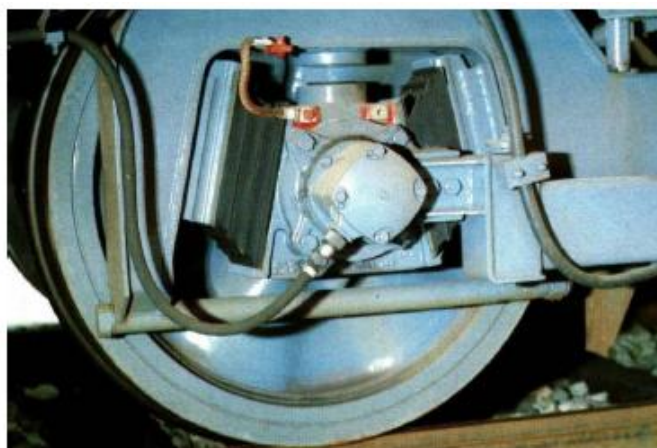


Figura 72. Muelle de elastómero para soportar cajas de grasa.

La carga que puede ser soportada por un bloque de goma o elastómeros de una composición determinada, dependerá del factor de forma o relación entre el área cargada y el área libre total. Por tanto, para soportar una carga concreta, se suelen construir muelles de varios elementos separados por placas de acero, tal y como se puede observar en la figura 72 antes mencionada.

Los muelles de elastómeros están fabricados de caucho o de materiales compuestos y presentan una histéresis natural importante y, por tanto, una adecuación para la supresión de vibraciones de alta frecuencia. El comportamiento de estos materiales puede variar considerablemente en función de la composición y de su forma, presentando valores de resiliencia, en general, superiores a los de un acero.

Los muelles de elastómeros presentan las ventajas de evitar el desgaste entre las superficies de deslizamiento y de reducir los ruidos provenientes de la alta frecuencia (por lo que su uso está muy extendido en ferrocarriles subterráneos).

Sin embargo, también se encuentran algunos inconvenientes:

- Tendencia natural de estos elementos a fluir o hacerse inestables.
- Presentan una memoria de carga debido a un cambio de propiedades permanente o semipermanente como resultado de cargas continuas u oscilantes.

- La temperatura, por su parte, produce un cambio en la altura del muelle, conocido como "efecto Joule", que aunque resulta completamente reversible, puede llegar a modificaciones de un 12% de cambio de la altura inicial frente a cambios climáticos de 30°C.

3.7.2.5 Suspensión neumática.

La suspensión neumática se basaba en la compresión de un número de cilindros y pistones con la presión de la caldera. Posteriores desarrollos han permitido la introducción de materiales de sellado adecuados para evitar las pérdidas de fluido que se pudieran producir.

En la actualidad se implanta en vehículos destinados al transporte de pasajeros donde la carga puede suponer el doble de la tara, presentando ventajas frente a otros sistemas por la dificultad de variación del comportamiento con las condiciones de funcionamiento y por permitir establecer la altura del suelo en función de las necesidades.

Comparada con las suspensiones habituales, la neumática presenta las siguientes ventajas:

- La curva fuerza-deformación es progresiva, lo que proporciona una frecuencia natural casi independiente de la carga soportada.
- Al contrario de los resortes, posee una gran capacidad de filtrado de las frecuencias elevadas.
- Permite mantener la altura de suspensión constante, mediante la inyección y extracción de aire de los resortes neumáticos.
- Existe la posibilidad de añadir amortiguamiento neumático, evitando la necesidad de incorporar amortiguadores adicionales.
- Hace trabajar a los amortiguadores alrededor de una posición predeterminada.
- Reduce la amplitud de cabeceo y de balanceo, al aceptar una ligera corrección dinámica.
- Atenúa los ruidos de las ruedas y los frenos, al no existir ninguna ligazón mecánica directa entre las ruedas y la parte suspendida.
- El mantenimiento de la suspensión neumática es poco costoso y su peso es inferior al de una suspensión metálica, especialmente cuando el vehículo está ya provisto de un suministro de aire comprimido o aceite a presión utilizado para otros fines.

Sin embargo, la suspensión neumática también presenta los inconvenientes siguientes:

- Es más cara de instalar.
- Un deterioro de los resortes o una deficiencia de la fuente de energía deja sin efecto la suspensión, siendo esta la razón de que ciertos constructores combinen la suspensión neumática con una suspensión metálica.

- La suspensión neumática, al carecer de estabilidad longitudinal y transversal, obliga a la utilización de órganos de empuje y de reacción, lo que minimiza la reducción de peso, una de sus ventajas.

Finalmente, mencionar que este tipo de resortes se basa en la compresibilidad del aire como elemento de suspensión. Por lo general, consisten en un vástago telescópico que se mueve dentro de un cilindro que contiene nitrógeno con una presión que depende de la fuerza que se desea mover. Esta presión es la que genera la fuerza del resorte. En la figura 73 se muestra un resorte neumático utilizado en un vehículo ferroviario.



Figura 73. Suspensión neumática en un vehículo ferroviario.

3.7.2.6 Amortiguadores.

Anteriormente se ha visto que existen algunos componentes de suspensión, como las ballestas, que proporcionan simultáneamente rigidez y amortiguamiento. Sin embargo, esto no es siempre así y la mayor parte de los sistemas de suspensión requieren la utilización de elementos amortiguadores.

La misión del amortiguador es devolver, en el mínimo tiempo posible, el resorte a su posición de equilibrio, absorbiendo, desde el punto de vista del confort, la energía cinética transmitida a la masa suspendida y reduciendo, desde el punto de vista de la estabilidad en ruta, el tiempo durante el que varía la adherencia de las ruedas.

El problema a resolver es complicado, ya que hay que tener en cuenta que:

- El amortiguamiento está solicitado por dos movimientos oscilatorios diferentes.

- Es necesario frenar simultáneamente las oscilaciones de la masa suspendida y las de la masa no suspendida a fin de evitar el rebote de las ruedas sin endurecer demasiado la suspensión, ya que las frecuencias de oscilación de estas masas son muy diferentes entre sí.
- Es conveniente que el amortiguador no intervenga, o en todo caso poco, para las oscilaciones de poca amplitud y de alta frecuencia, pues de lo contrario la masa suspendida estaría sometida a trepidaciones sin obtenerse una mejora sensible de la estabilidad en ruta.
- La velocidad y la aceleración de las oscilaciones son función no solo de la amplitud sino también de la frecuencia, y esta última varía, para una rigidez determinada, de acuerdo con el estado de carga; a menos que la rigidez no varíe en función de la carga de manera apropiada para obtener una frecuencia constante.

Existen distintas clases de amortiguadores utilizados en los sistemas de suspensión. Los más usados pueden clasificarse en dos grupos:

- Amortiguadores de fricción.
- Amortiguadores hidráulicos.

Los amortiguadores de fricción (ver figura 74) se utilizan en suspensiones de vagones de mercancías de vehículos ferroviarios. Constan de elementos de fricción a los que se deriva o hace pasar parte de la carga vertical, que los precomprime. Otras veces, la precompresión se obtiene mediante resortes específicos. La fricción generada de estos elementos por el movimiento de la suspensión proporciona la fuerza amortiguadora.

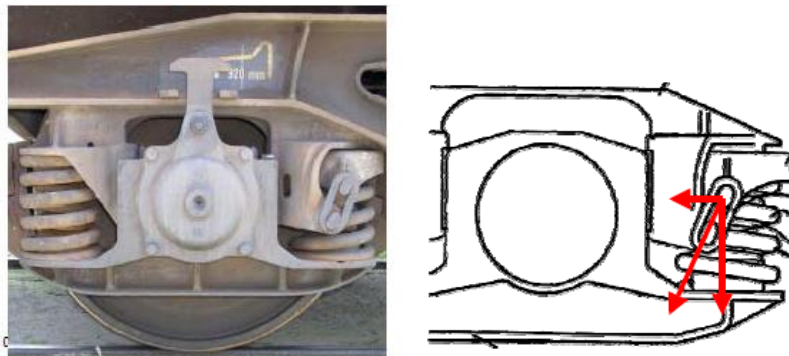


Figura 74. Amortiguador de fricción.

Los amortiguadores de fricción presentan varias desventajas entre las que cabe destacar:

- Mientras que no se supera la fuerza de fricción, la suspensión permanece bloqueada y el vehículo queda sin suspensión.
- Superada la fuerza de fricción, la fuerza amortiguadora disminuye en vez de aumentar con la velocidad como sería deseable.

- Su comportamiento se altera con el desgaste.
- Es necesario reponer las piezas desgastadas periódicamente.

Como consecuencia de estas limitaciones, tanto en vehículos de carretera como en los ferroviarios destinados a servicios de viajeros, se han impuesto los amortiguadores hidráulicos. En éstos, la fuerza amortiguadora es función creciente con la velocidad.

Básicamente, los amortiguadores hidráulicos constan de un pistón que trabaja dentro de un cilindro en el que existe aceite a ambos lados del pistón (debido a que los obstáculos están repartidos al azar y que la probabilidad de encontrar un obstáculo en relieve es la misma que la de encontrar una depresión, es conveniente que el amortiguador sea de doble efecto). Sobre este, existen una serie de orificios y una válvula adicional precomprimida que permite el paso de aceite de una parte a otra del pistón cuando la presión supera un valor dado.

Existen varios tipos de amortiguadores en el mercado. Los más comunes en ferrocarriles son los de doble tubo presurizados (cuyo fluido de trabajo es aceite) y no presurizados (que utilizan aceite y gas), así como los amortiguadores monotubo presurizados y no presurizados (ver figura 75). La solución de amortiguamiento más económica es la de doble tubo no presurizado.

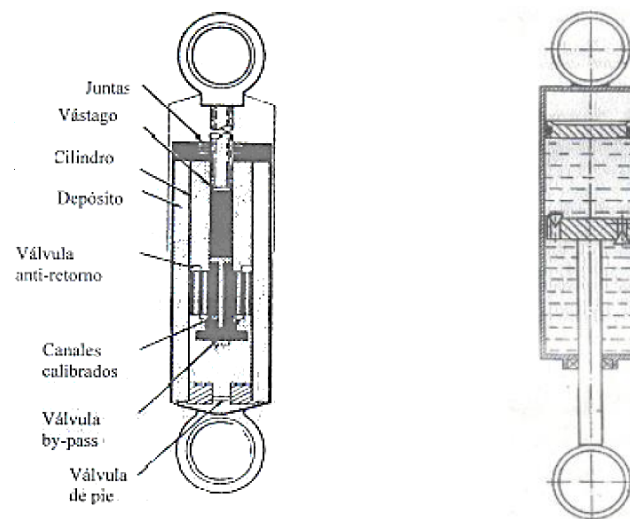


Figura 75. Amortiguador hidráulico de doble tubo (izq.) y monotubo (dcha.).

3.7.3 Tipos de suspensión.

3.7.3.1 Suspensión primaria.

Entre el conjunto de ejes-ruedas y el bastidor del bogie, siempre se intercala un sistema de suspensión que, como primer órgano flexible entre dicho conjunto y el tren, se denomina suspensión primaria.

La suspensión primaria cumple dos funciones. Por una parte reduce el nivel de vibraciones que soporta el bastidor del bogie y los elementos montados sobre él. Por otra parte, asegura un reparto homogéneo de cargas sobre las ruedas, lo que es fundamental de cara a las prestaciones de frenada-tracción y para evitar el riesgo de descarrilamiento.

Los elementos de la suspensión primaria, además de asegurar la suspensión vertical, están relacionados con el guiado de los ejes en direcciones longitudinales y laterales. Las rigideces de guiado resultan determinantes para definir la estabilidad dinámica del vehículo y los esfuerzos rueda-carril que se producen al paso por la curva.

A medida que aumentan las sollicitaciones dinámicas y velocidades, estas suspensiones primarias se complican, pasando del simple montaje de resorte y amortiguador, o de campanas de goma o caucho, a montajes muy complejos y avanzados como que se muestran en la figura 76.

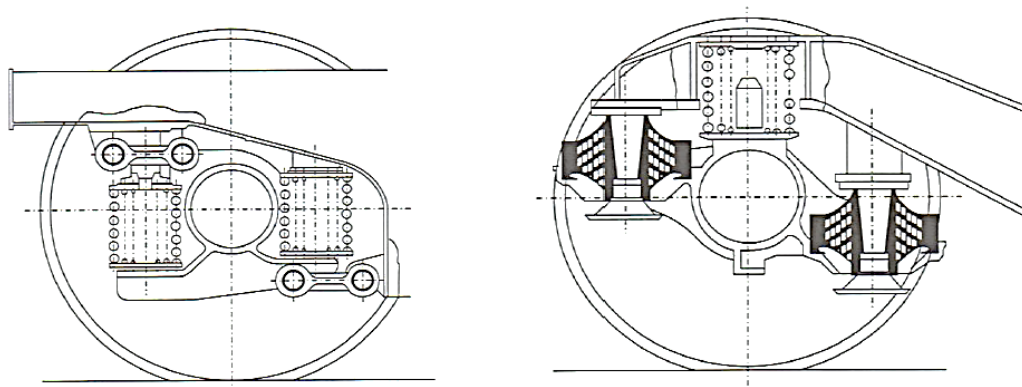


Figura 76. Montajes de suspensión primaria.

3.7.3.2 Suspensión secundaria.

Entre la propia caja del coche ferroviario y el bogie, hay una segunda suspensión que, como tal, se denomina suspensión secundaria, tal y como se muestra en la figura 77.

La suspensión de los vehículos ferroviarios debe asegurar el filtrado de las vibraciones, no sólo en dirección vertical, sino también en dirección lateral. Este filtrado, en los vehículos guiados, es responsabilidad de la suspensión secundaria. Por este motivo, las suspensiones secundarias presentan una alta flexibilidad en ambas direcciones, vertical y lateral.

En dirección vertical es habitual la utilización de suspensiones con frecuencia natural próxima a 1 Hz. Esta elección se debe a que es a esta frecuencia a la que el ser humano mejor soporta los movimientos verticales, debido a que el centro de gravedad de nuestro cuerpo oscila con esta frecuencia al caminar.

La suspensión secundaria puede ser también de muelles o actuar mediante gomas o balones llenos de aire comprimido. Éste último es un sistema muy utilizado por la comodidad que supone para el viajero en redes a velocidades moderadas. Es un diseño que ofrece numerosas ventajas. Una de ellas: su mantenimiento es nulo o mínimo. Por otro lado, es

posible una fácil regulación mediante la incorporación de mayor o menor presión en los balones de aire según la carga de viajeros o situación del tren en curva o recta, manteniéndose constante el nivel de la altura de piso respecto a la altura de carriles. Adicionalmente a la presión incorporada se obtiene la información de carga de viajeros, necesaria para la regulación eléctrica de motores, a fin de conseguir procesos de arranque y freno a aceleración constante e independiente de dicha carga de viajeros.

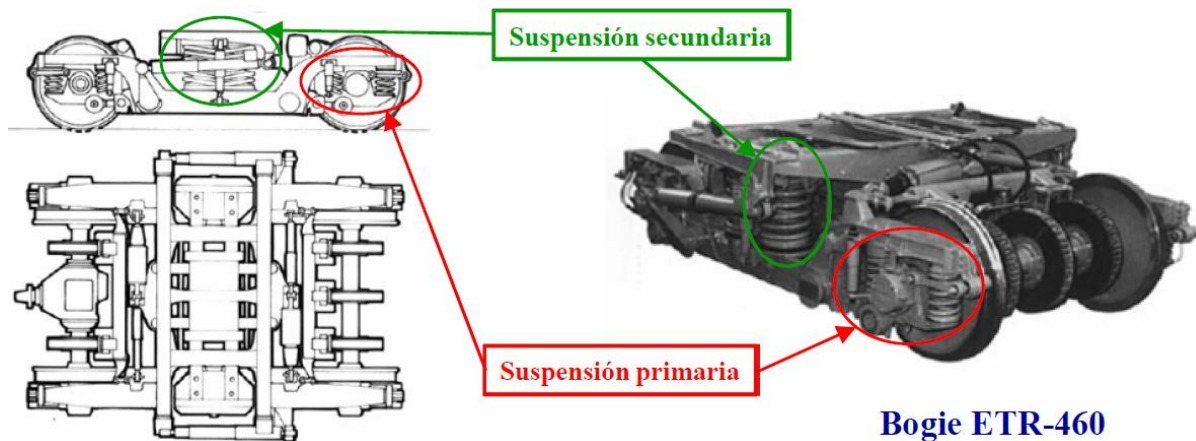


Figura 77. Suspensión primaria y secundaria.

3.8 Ruedas. [5,6 y 7]

3.8.1 Introducción.

El modo de desplazamiento que se utiliza en la mayoría de los casos en el ferrocarril, es el de la rueda entera de acero rodando sobre un carril igualmente de acero, a excepción de reducidos casos en los que se utiliza para su desplazamiento ruedas dotadas de neumáticos o fenómenos de electromagnetismo.

La misión de las ruedas de tren es la de sustentar, guiar, transmitir al carril los esfuerzos, lograr circular en curvas y frenar. Cada una de estas funciones induce esfuerzos mecánicos y térmicos en las ruedas.

Los Estados demandan cada vez más el uso de trenes de alta velocidad. Este tipo de vehículos ferroviarios están sometidos a mayores cargas, lo que unido a que en el pasado se han producido algunos accidentes, conduce a la exigencia de unas inspecciones más rigurosas y menores intervalos para las mismas en el caso de los componentes críticos, entre los que se encuentran las ruedas. La seguridad en los ferrocarriles es primordial, siendo en el caso de alta velocidad, crítica. La aparición de fisuras en las ruedas puede afectar de forma considerable a la seguridad, ya que estas pueden causar un descarrilamiento. Así, ruedas y ejes son las partes más críticas del material rodante ferroviario. Fallos mecánicos o abusos en las dimensiones de diseño pueden causar descarrilamientos.

3.8.2 Partes de la rueda ferroviaria.

La rueda de ferrocarril se constituye sobre un sólido de revolución alrededor de un eje y (según se referencia en la figura 78) consta de una llanta (A), un cubo (E) y un velo (C), presentando sobre la llanta un plano mediano teórico (Z) que pasa por el punto de contacto rueda-carril y es perpendicular al eje mencionado anteriormente. La unión del velo (C) a la llanta (A) es mediante sendas superficies interior y exterior de acuerdo, al igual que la unión del velo (C) al cubo (E).

En el velo (C) existe una línea meridiana teórica que va desde el acuerdo (P) del velo (C) con la llanta (A) al acuerdo (T) del velo (C) con el cubo (E), existiendo, entre el acuerdo del velo (C) con la llanta (A) y el acuerdo del velo (C) con el cubo (E) una primera, una segunda y una tercera curvatura concatenadas con doble punto de inflexión, siendo el plano de la cara exterior de la llanta (A) aproximadamente tangencial a la superficie exterior de la segunda curvatura del velo (C).

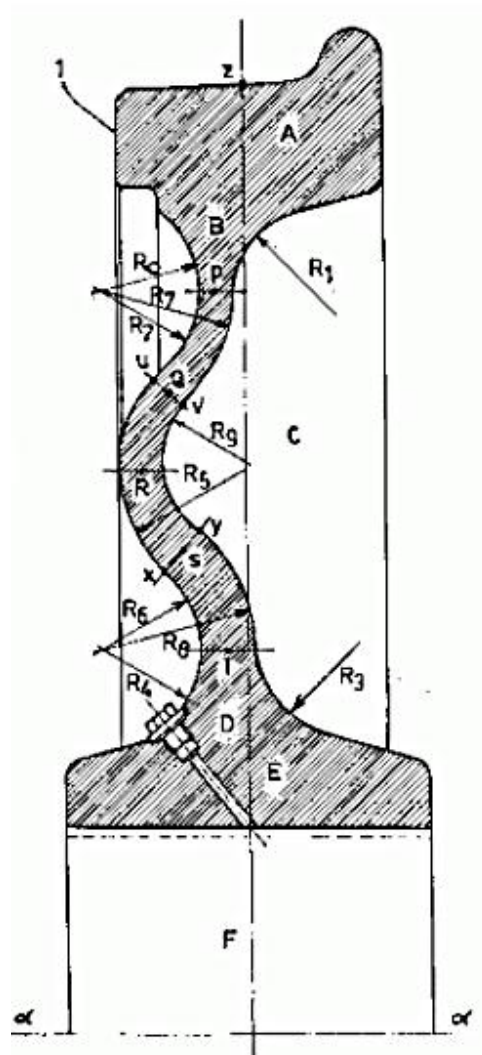


Figura 78. Principales parámetros dimensionales de una rueda.

3.8.3 Tipos de ruedas ferroviarias.

Las ruedas pueden clasificarse como sólidas o enterizas, de llanta o ensambladas, tal y como se muestra en la figura 79.

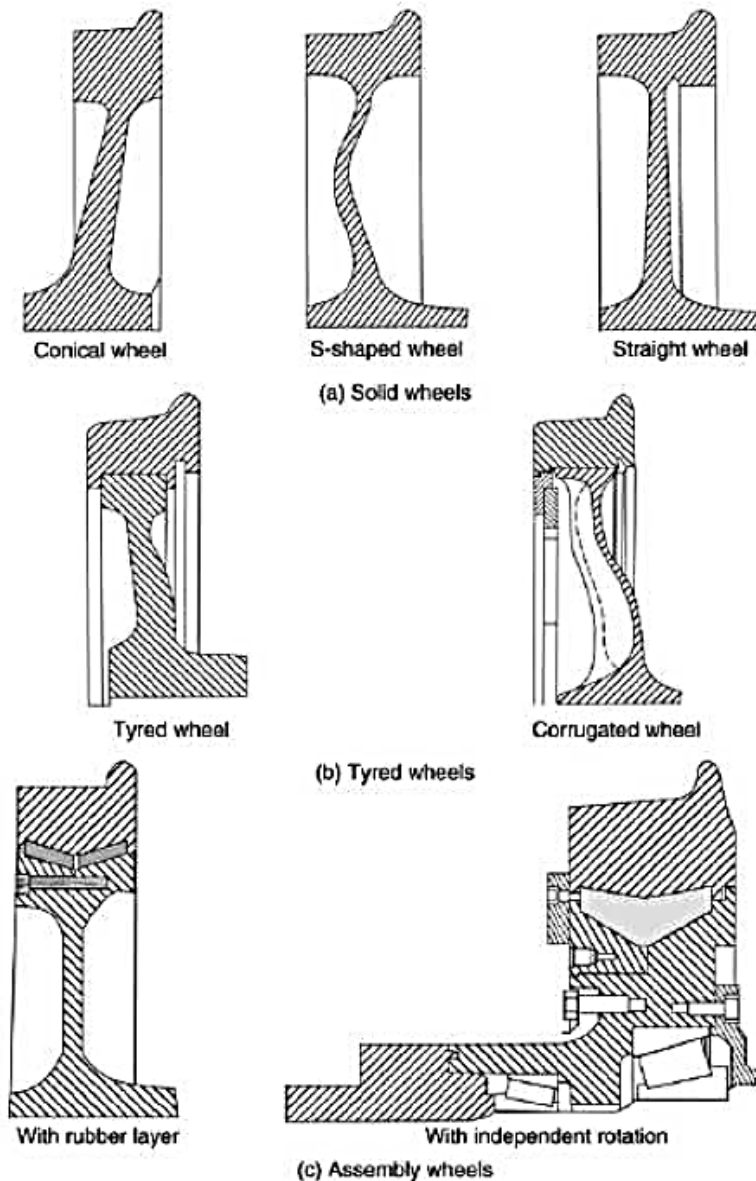


Figura 79. Tipos de ruedas: (a) enterizas, (b) de llanta y (c) ensambladas.

Las ruedas sólidas tienen tres elementos destacados: llanta, velo y el cubo; principalmente difieren unas de otras en la forma del velo.

Las ruedas de llanta tienen una llanta ajustada al velo de la rueda que puede ser reemplazado cuando está alcance su límite máximo de reperfilado.

Las ruedas tienen distintos tipos de velo como rectos, cónicos, con forma de S, de radios o corrugados cuando se ven a través de una sección de corte. Un disco recto reduce el peso de la construcción y puede ser formado de manera que el espesor del metal corresponda al nivel de

tensión local sometido. Los discos con forma cónica y forma de S sirven para incrementar la flexibilidad de la rueda, reduciendo por tanto las fuerzas de interacción entre las ruedas y los carriles. Los discos corrugados tienen mejor resistencia a las inclinaciones laterales.

La necesidad de reducir las fuerzas de interacción rueda-carril, ha conducido al desarrollo de ruedas elásticas que incorporan una capa de material con bajo módulo de elasticidad (goma, poliuretano) denominadas *Wheelset Spring*, tal y como se muestra en la figura 80. Esto ayuda a atenuar las fuerzas que actúan con frecuencias elevadas en la interacción rueda-carril.



Figura 80. Rueda *Wheelset Spring*.

3.9 Motores de tracción. [6]

Los motores de tracción se montan en cada uno de los ejes de los bogies motores (en caso de que se trate de un tren con tracción distribuida; si fuera concentrada, únicamente en su cabeza motora), tal y como se muestra en la figura 81. Su función es la de accionar el movimiento de avance del tren, así como retener el avance en el momento de frenado (freno motor).



Figura 81. Motor montado en bogie.

3.10 Equipo de freno. [6]

Los bogies disponen de discos de frenos montados en llanta (ver figura 82), cada una con su unidad de freno. Cada unidad de freno está formada por la mordaza, zapatas de fricción (figura 83) y los cilindros de freno. El conjunto de freno va montado en el extremo exterior de las vigas longitudinales del bogie.



Figura 82. Equipo de freno montado en bogie.



Figura 83. Zapatas de fricción.

Capítulo 4

Ejes ferroviarios.

4.1 Introducción. [9]

Un eje es un elemento constructivo destinado a guiar el movimiento de rotación de una pieza o de un conjunto de piezas, como una rueda o un engranaje. Un eje se aloja por un diámetro exterior al diámetro interior de un agujero, como el de un cojinete o un cubo, con el que tiene un determinado tipo de ajuste. En algunos casos el eje es fijo (no gira) y un sistema de rodamientos o de bujes inserto en el centro de una pieza permite que ésta gire alrededor del mismo. En otros casos, la rueda gira solidariamente al eje y el sistema de guiado se encuentra en la superficie que le soporta. En la figura 84 se observan una serie de ejes denominados árboles de levas.



Figura 84. Árboles de levas.

4.2 Ejes de un vehículo. [9]

4.2.1 Introducción.

Se denominan ejes de un vehículo a las líneas imaginarias de dirección transversal respecto a las cuales giran las ruedas cuando el vehículo avanza recto. En los ciclos, estos ejes coinciden con los ejes de las ruedas; en los vehículos con ruedas a cada lado, se denomina eje a la recta transversal que une los centros de dos ruedas.

Los ejes son componentes del mecanismo de un vehículo. Mantienen la posición relativa de las ruedas entre sí y éstas respecto al chasis. En la mayoría de los vehículos las ruedas son la única parte que toca el suelo y los ejes deben soportar el peso del mismo así como cualquier carga adicional que éste transporte, junto con otros esfuerzos como las fuerzas de aceleración y frenado.

Además del objetivo de componente estructural, los ejes deben cumplir con una o más de las siguientes funciones dependiendo del diseño:

- **Transmisión:** uno o más ejes deben formar parte del sistema de transmisión. Un sistema mecánico ejerce una fuerza descentrada sobre el eje que, con la reacción del apoyo del mismo, da lugar a un momento de fuerzas sobre éste que es transferido hacia las ruedas para la aceleración del vehículo.
- **Frenado:** para disminuir la velocidad de un vehículo se aplica una fuerza descentrada de forma que, con la reacción del apoyo del eje, se forma un momento de fuerzas en sentido contrario a la rotación de la rueda. Tanto los frenos de disco como los frenos de tambor ejercen esta fuerza descentrada. Además puede aplicarse el freno motor a través de la transmisión, que tiene un efecto más significativo en vehículos pesados y con relativamente poca deceleración máxima.
- **Guía:** el eje de una rueda debe, además, guiar la rueda para que no se desplace axialmente, así como para que no gire involuntariamente respecto a un eje perpendicular al eje de giro. El sistema de dirección, en un vehículo que no vaya guiado, controla el ángulo de guiado de las ruedas respecto al chasis, en la mayoría de los casos sólo las del eje delantero.

4.2.2 Características estructurales.

Un eje rígido es una barra que une una rueda de un lado del vehículo con la del otro lado, debiendo disponer de algún sistema (diferencial, por ejemplo) que permita a cada una de ellas girar a una velocidad diferente, lo que es necesario en las curvas.

En los ejes independientes o de suspensión independiente, cada rueda está unida a un eje por separado. Los vehículos de pasajeros modernos generalmente tienen este tipo de eje tanto delante como detrás. De esta forma, la masa no suspendida es menor y cada rueda tiene suspensión por separado con lo que reaccionan de forma diferente que en el caso de un eje rígido, proporcionando más confort y maniobrabilidad al circular sobre baches.

4.2.3 Tipos de ejes.

4.2.3.1 Eje motriz.

Un eje que es propulsado por un motor se denomina **eje de propulsión**. Los automóviles modernos, con tracción delantera típicamente, combinan la caja de cambios y el eje delantero en una sola unidad llamada transaxle o conjunto motriz.

El eje motriz se divide con un mecanismo de diferencial y juntas universales entre los dos semiejes. Cada eje está conectado a las ruedas mediante juntas homocinéticas que permiten a la rueda moverse libremente en sentido vertical y guiar las ruedas en las curvas mediante el sistema de dirección.

En vehículos con tracción trasera, es posible utilizar juntas *Cardan*, ya que los ejes de las ruedas no cambian de orientación y no se varía la relación de transmisión con el movimiento vertical de las ruedas.

En algunos diseños simples, como los karts, a veces se utiliza una sola rueda motriz, existiendo un solo eje de propulsión dividido que, exclusivamente, conduce a una rueda.

4.2.3.2 Eje libre.

Un eje libre es aquel que no forma parte del sistema de transmisión y gira libre. El eje trasero en un automóvil con tracción delantera se puede considerar un eje libre. Los camiones y remolques utilizan tracción trasera debido a su reparto de cargas, lo que permite el uso de ejes libres delanteros.

Algunos camiones y remolques tienen un eje portador, que es un eje libre en tándem que puede subirse o bajarse con mecanismos neumáticos para que soporte o no parte del peso del vehículo. Éste se puede bajar para incrementar la capacidad de carga o para distribuir el peso sobre más ruedas, por ejemplo para cruzar un puente con restricciones de peso por eje. Cuando no se utilizan se levantan del suelo para disminuir el desgaste en los neumáticos debido a la deriva en las curvas. Varios fabricantes ofrecen sistemas neumáticos controlados por computadora para que el eje portador baje automáticamente cuando se alcanza un determinado nivel de carga.

4.3 Ejes de ferrocarril.

4.3.1 Definiciones. [9]

Se encuentran diversas definiciones para la descripción de los ejes ferroviarios. Entre ellas, desde la menos a la más precisa, cabe destacar las siguientes:

- Barra que atraviesa un cuerpo giratorio y le sirve de apoyo en el movimiento.

- Elemento axial al que se aplica un par motor para producir el giro de una componente ajustable.
- Pieza cilíndrica de acero sobre la que se montan las ruedas, las cajas de grasa y los elementos terminales de la transmisión de un vehículo ferroviario, donde el número de ejes suele ser de dos o tres.

En la figura 85 se muestra la imagen de un eje de ferrocarril, cuyas partes y proceso de diseño ya fue descrito en el capítulo 3 (apartado 3.4).



Figura 85. Eje de ferrocarril.

4.3.2 Funciones principales del órgano de rodadura, ejes y bogies. [7]

La diferencia principal entre un vehículo ferroviario y otros tipos de transporte rodado es la orientación proporcionada por la vía. La superficie de los carriles no solo soportan las ruedas, sino también las guían en dirección lateral. Los carriles y los cruces cambian la dirección de rodadura de las ruedas y entonces determinan la dirección del viaje para los vehículos ferroviarios.

El órgano de rodadura es el sistema que proporciona un movimiento seguro del vehículo a lo largo de la vía. Incluye componentes tales como ejes montados con cajas de grasa, la suspensión elástica, los frenos, órganos de tracción, y los dispositivos para la transmisión de las fuerzas de tracción y frenado al cuerpo del vehículo. Sus funciones principales son:

- Transmisión e igualación de la carga vertical desde las ruedas del vehículo a las vías.
- Guía del vehículo a lo largo de la vía .

- Control de las fuerzas dinámicas debido al movimiento sobre las irregularidades de la vía, en curvas, intersecciones, y después de cruces entre coches.
- Amortiguamiento eficiente de las oscilaciones.
- Aplicación de las fuerzas de tracción y frenado.

En vehículos sin bogies la suspensión, frenos, y equipamiento de tracción se montan en la estructura del cuerpo del vehículo. Las fuerzas de tracción y frenado son transmitidas a través de barras de tracción o cajas de grasa guía. Vehículos convencionales de dos ejes generarán mayores fuerzas en curvas cerradas que el vehículo equivalente con bogies estando, por tanto, su longitud limitada.

Como ya se ha explicado, el órgano de rodadura montado en una estructura independiente que puede girar en relativo al cuerpo del vehículo se conoce como bogie. El número de ejes montados que unen los bogies, los clasifica. El tipo más común es el bogie de dos ejes, pero bogies de tres y cuatro ejes se encuentran también, a menudo, en locomotoras.

En el pasado, los bogies simplemente permitían al órgano de rodadura girar en un plano horizontal relativo al cuerpo del vehículo permitiendo de esta manera a los ejes montados tener pequeños ángulos de ataque en curvas. En los bogies modernos, la estructura del bogie transmite todas las fuerzas, longitudinal, lateral, y vertical entre el cuerpo del coche y los ejes montados. La estructura también soporta el equipamiento de frenado, los órganos de tracción, suspensión y amortiguación. Asimismo puede alojar los dispositivos de inclinación, dispositivos de lubricación para el contacto rueda-carril y mecanismos para controlar el posicionamiento radial de ejes montados en curvas. Los vehículos de bogies son normalmente más pesados que los vehículos de dos ejes. Sin embargo, el diseño de vehículos ferroviarios con bogies es a menudo más simple que los vehículos de dos ejes, proporcionando éstos mayor fiabilidad y un mantenimiento mejor.

4.3.3 Ejes montados. [7]

Un eje montado comprende dos ruedas conectadas de forma rígida por un eje común estando soportado por rodamientos montados en la caja de grasa. El eje montado proporciona:

- La distancia necesaria entre el vehículo y la vía.
- La orientación que determina el movimiento dentro del ancho del carril, incluyendo curvas y cruces.
- Los medios de transmisión de las fuerzas de frenados y tracción a los carriles para acelerar y frenar el vehículo.

Por otro lado, el diseño del eje montado depende de:

- El tipo de vehículo (tracción o arrastrado).

- El tipo de sistema de frenado usado (zapatas de freno, freno de disco en el eje, o freno de disco en la rueda).
- La construcción del centro de la rueda y la posición de los rodamientos en el eje (interior o exterior).
- La intención de limitar frecuencia de las fuerzas más elevadas mediante el uso de elementos elásticos entre el centro de la rueda y la llanta.

Los principales tipos de diseños de ejes montados se muestran en la figura 86. A pesar de la variedad de diseños, todos estos ejes montados tienen dos características comunes: la conexión rígida de las ruedas en el eje y el perfil de la sección de corte de la superficie de rodadura de la rueda, llamada perfil de la rueda.

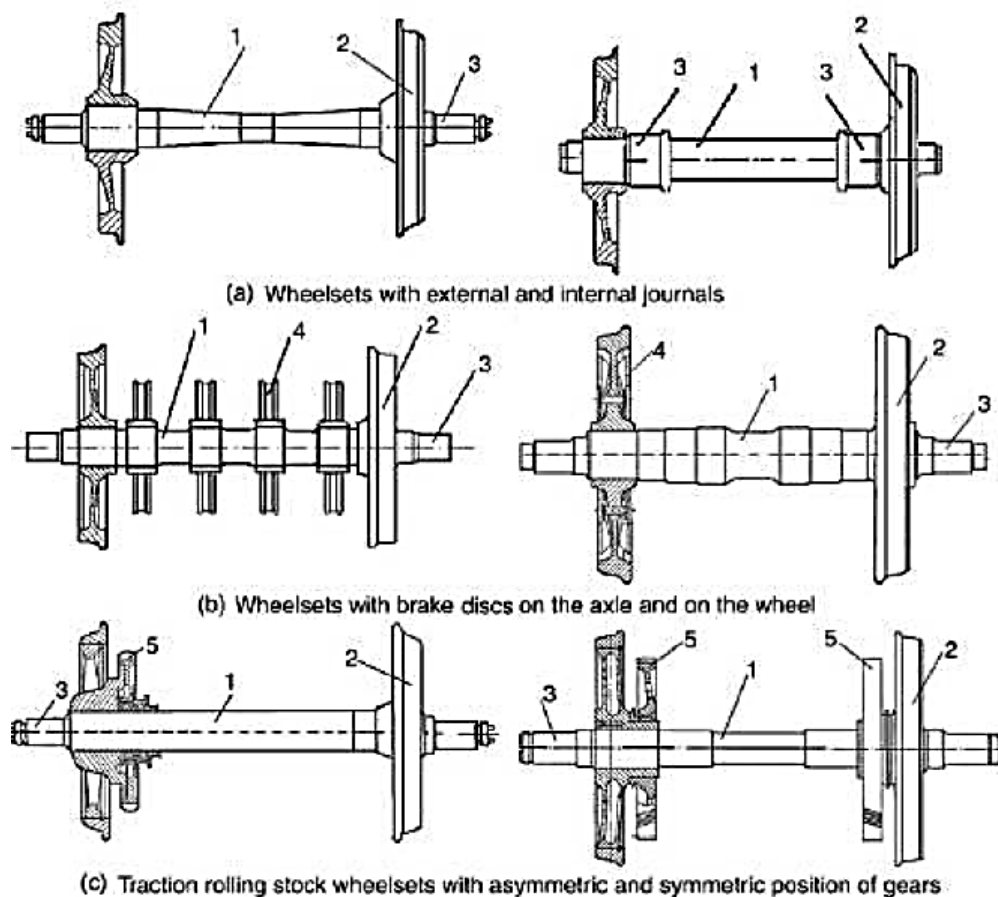


Figura 86. Principales tipos de diseños de eje montado: (a) con rodamientos externos e internos; (b) con discos de freno en el eje y en la rueda; (c) con posición asimétrica y simétrica de engranajes (1, eje; 2, rueda; 3, rodamiento; 4, disco de freno; 5, engranaje de dientes).

En las curvas, el carril exterior de la vía tiene un radio mayor que el carril interior. Esto implica que una rueda cilíndrica tiene que rodar más rápido en el carril exterior que en el interior. Como el movimiento de rotación de las ruedas por unidad de tiempo es el mismo tanto para la rueda exterior como para la interior, tal movimiento no puede ocurrir por

rodadura pura. Como ambas ruedas realizan distancias de viaje iguales, una de ellas o ambas, deslizará incrementado de esta manera la resistencia a la rodadura y causando desgaste de ruedas y carriles. La solución es mecanizar la superficie de rodadura de las ruedas a un perfil cónico con ángulo de inclinación γ variable con el eje del eje montado (ver figura 87). La posición del punto de contacto cuando el eje montado está en la posición central en los carriles, determina el conocido como “*tape-circle*” o círculo de rodadura, donde se mide el diámetro de la rueda.

En la parte interior de la rueda, el perfil cónico tiene una pestaña que previene el descarrilamiento y guía el vehículo una vez que las fuerzas de cortadura existentes entre rueda y carril superan la resistencia del contacto entre ambos.

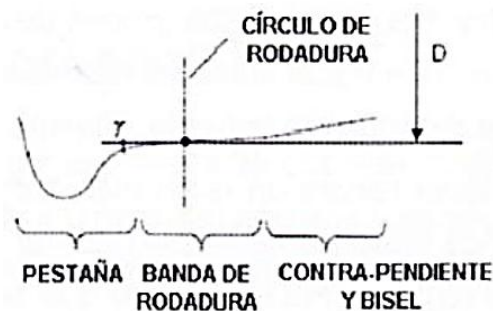


Figura 87. Principales componentes del perfil de rodadura.

Un eje montado con perfiles cónicos puede moverse lateralmente en una curva de tal forma que la rueda exterior está rodando en una trayectoria de mayor radio (debido al ángulo de conicidad) que la interior. Se observa que para cada radio de la curva solo existe un valor de conicidad que elimina el deslizamiento. Como los diferentes ferrocarriles van variando los radios de curva con el tiempo, la forma del perfil de la rueda que proporciona mínimo deslizamiento depende de las características de la vía. Las administraciones ferroviarias normalmente especifican los perfiles de rueda permisibles para sus infraestructuras y el grado de desgaste permitido antes de que se requiera un reperfilado.

La figura 88 muestra diversos ejemplos de perfiles de ruedas nuevas. Para entender el comportamiento dinámico de un vehículo ferroviario la conicidad de la intercara es crítica. Conicidad se define como la diferencia de los radios de rodadura de las ruedas para un deslizamiento lateral dado del eje montado.

A pesar de la variedad de perfiles de rueda, todos ellos tienen un número de características comunes. Su anchura es típicamente 125-135 mm y la altura de la pestaña es de 28-30 mm. El ángulo de inclinación de la pestaña está normalmente entre 65 y 70°. Alrededor del “*tape-circle*” la conicidad es 1:10 o 1:20 para material rodante común. Para material rodante de alta velocidad, la conicidad se reduce a 1:40 o 1:50 para prevenir movimiento de lazo. Algunos perfiles de rueda modernos, particularmente para material rodante de pasajeros, no son cónicos pero se diseñan en cambio desde unas series de radios que aproximan la rueda a un perfil usado. Este diseño pretende dar una forma más estable y prevenir los cambios significativos en conicidad que puede ocurrir en ruedas cónicas desgastadas.

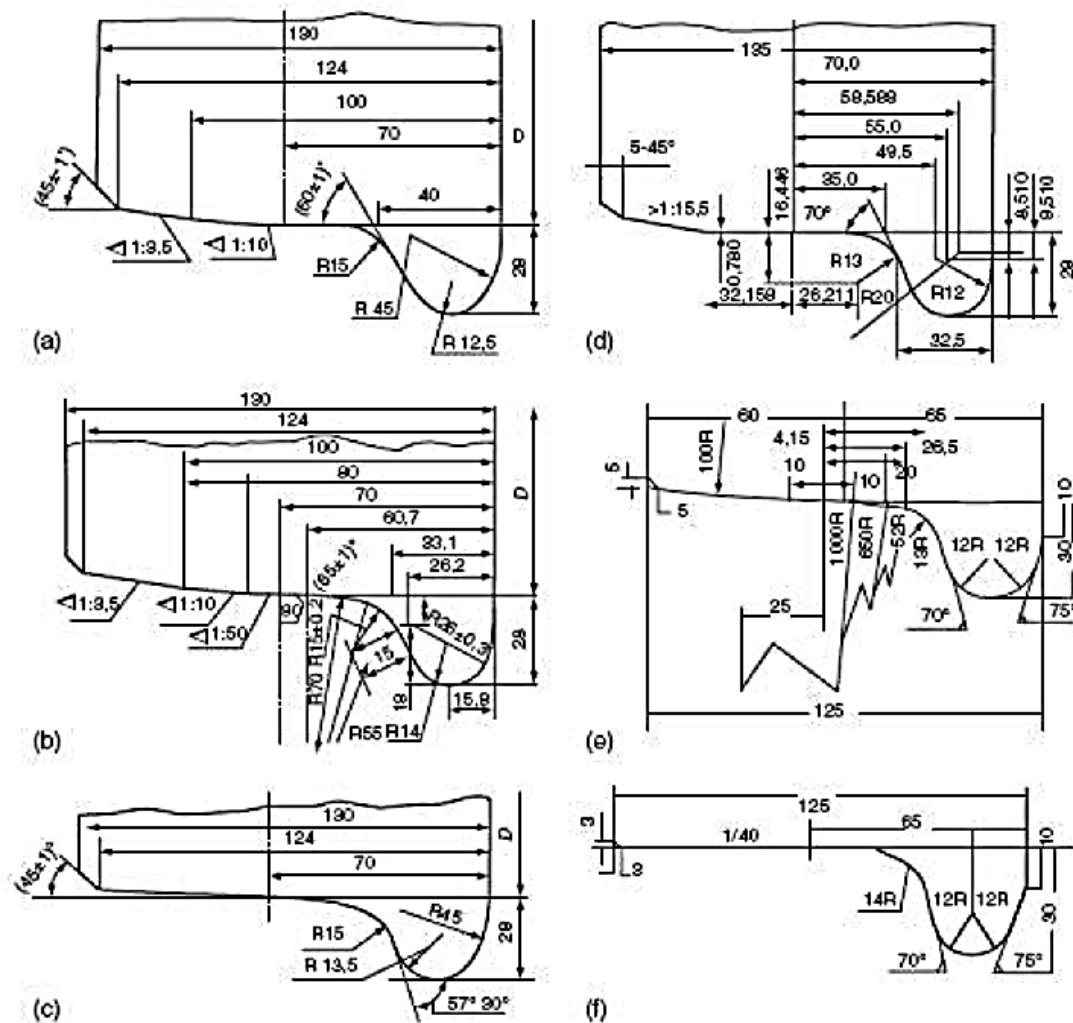


Figura 88. Perfiles comunes de ruedas: (a) para coches de pasajeros y mercancías (Rusia); (b) para coches de alta velocidad (Rusia); (c) para material rodante industrial (Rusia); (d) para coches de pasajeros y mercancías en Europa; (e, f) para trenes de alta velocidad (Japón).

Para perfiles cuya forma no sea puramente cónica (por diseño o por desgaste en servicio), se le aplica el término equivalente de conicidad. Este es el cociente de la diferencia de los radios de rodadura entre el doble del desplazamiento lateral de eje montado, tal y como se muestra en la ecuación 4.1.

$$\gamma_{eq} = \frac{\Delta R}{2y} \quad (4.1)$$

Como la rueda se desgasta, la forma del perfil puede modificarse significativamente dependiendo de un gran número de factores. Estos pueden ser: el perfil de curvatura de la ruta, el diseño de la suspensión, el nivel de las fuerzas de tracción y frenado aplicadas, la forma del perfil medio del carril, y el régimen de lubricación. El desgaste de la banda de rodadura (figura 89) aumenta la altura de la pestaña y eventualmente causa el contacto con los tornillos existentes en la vía. Si el desgaste de la banda de rodadura causa que el perfil sea demasiado

cóncavo las tensiones existentes en la parte exterior de la rueda y del carril, pueden conducir al conocido como daño de falsa pestaña. El desgaste de la pestaña (o de reborde), por su parte, puede conducir al incremento del ángulo de pestaña y reducción de su espesor.

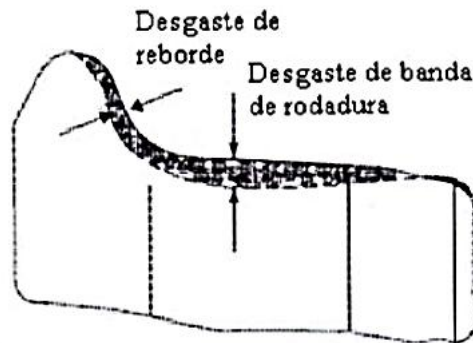


Figura 89. Desgaste de la banda de rodadura y pestaña.

En condiciones extremas, este tipo de desgaste puede incrementar el riesgo de descarrilamiento en cruces. Para evitarlo, los perfiles de rueda generalmente se mecanizan a su forma de diseño por torneados periódicos en un torno de rueda. Esto puede realizarse normalmente sin la necesidad de desmontar el eje montado del vehículo.

Está claro que las condiciones de contacto variarán considerablemente dependiendo de la forma de los perfiles de rueda y carril. Éste puede ser en un único punto, en dos puntos o en toda la superficie, como se muestra en la figura 90. El contacto en un punto único se produce entre la parte cónica o en la zona de la banda de rodadura gastada del perfil de la rueda y la esquina redondeada del perfil. En este caso las ruedas se desgastan rápidamente tomando la forma del carril. Con dos puntos de contacto la rueda además toca el carril con su pestaña. En este caso, el contacto rodante tiene dos radios diferentes lo que causa un deslizamiento intensivo y un desgaste rápido de la pestaña. El contacto de toda la superficie aparece cuando el perfil de la rueda y todo el ancho de la cabeza del carril se desgastan en toda su extensión, siendo los radios en las proximidades esa zona muy similares.



Figura 90. Posibles situaciones de contacto entre la rueda y el carril: (a) contacto en un único punto; (b) contacto en dos puntos; (c) contacto toda la superficie.

Finalmente, cabe mencionar que la mejora de la fiabilidad de los rodamientos despierta interés en las ruedas con rotación independiente proporcionando reducciones significativas en las masas rodantes debido a la eliminación del eje. Con el desacoplamiento de las ruedas, la rotación independiente del eje montado elimina la mayoría de las fuerzas de guiado en éste.

Tales ejes montados han encontrado aplicación en cualquier ancho de vía variable proporcionando al material rodante una rápida transición desde un ancho de vía a otro o en transporte urbano por carril donde es necesario un nivel bajo del suelo de los vehículos.

4.3.4 Instalación de los ejes en el bogie. [6]

A lo largo de la historia del ferrocarril han existido tres métodos fundamentales para la instalación de los ejes en bogies:

- **Por cojinetes:** Se usaba en los vagones antiguos y consiste en un cojinete que se instala en el interior de la caja de grasas en la parte superior de la misma. Este cojinete es semicilíndrico en la parte donde apoya el eje, está construido en bronce con una capa de metal antifricción. Una ventaja de este sistema era que con solo levantar la caja de grasas con ayuda de un gato, el eje en mal estado dejaba de hacer fuerza sobre el cojinete y entonces éste podía ser removido fácilmente e instalar otro nuevo.
- **Por rodamientos:** La principal ventaja sobre los de cojinetes es que la calidad de rodado es mucho mejor y es más difícil el sobrecalentamiento de los mismos. Los rodamientos tienen la particularidad de ser de rodillos con forma de barril y con caras no cilíndricas. Esto es beneficioso, ya que cuando la suspensión del bogie trabaja y los ejes se inclinan, el rodamiento acaba haciendo lo propio y así el eje sigue apoyado correctamente y rueda sin problemas. Su principal inconveniente es que son muy complicados de reemplazar.
- **Por manguitos:** Estos son rodamientos que se colocan en la punta de los ejes y llevan como seguro una tapa cónica truncada que termina en una pirámide, también truncada, donde se encuentran tres bulones formando una especie de triángulo. Los manguitos van colocados en la punta del eje y se apoyan en su parte superior en una pieza llamada "adaptador del rodamiento". Así la cara externa de éste, al apoyar, queda quieta y el eje continúa girando en su interior. Para lubricar estos rodamientos, en el centro de la tapa que tiene los tres bulones, hay una perforación roscada con un tornillo que hace las veces de tapón. Se retira este tornillo y se engrasa el rodamiento. Para que el eje no se salga (por ejemplo al levantar el bogie), por debajo tiene una pieza denominada cuña, que se encuentra sujeta al lateral del bogie con dos bulones. Las grandes ventajas del montaje de ejes con manguitos son, sobre todo, la gran capacidad de rodaje del eje (con muy poca fricción) y su fácil desmontaje.

4.4 Ferrocarril de alta velocidad: el eje hueco.

[9]

El eje hueco en los ferrocarriles fue desarrollado a principios del siglo XX. Montaba los motores de tracción encima o a un costado del eje motriz, acoplándose a éste mediante un conjunto de engranajes y otro eje hueco semiflexible. La locomotora "Pennsylvania Railroad GG1" usaba el eje hueco.

Este sistema fue abandonado a medida que los motores disminuían su peso y tamaño. Sin embargo, en los últimos años, con el inicio de los ferrocarriles de alta velocidad, el eje hueco está dando grandes resultados, gracias a las magníficas prestaciones que ofrece. Así, este tipo de vehículo ferroviario tiene, en la mayoría de los casos, montados ejes huecos en sus vagones, como medida de ahorro de peso y tamaño, así como de costes de fabricación.

Estos trenes alcanzan velocidades de 356,8 km/h, pero comercialmente únicamente llegan a los 300 km/h como máximo.

Capítulo 5

Conceptos complementarios de mecánica.

5.1 Introducción a la resistencia de materiales.

La resistencia de un elemento mecánico es una propiedad que es intrínseca a éste y depende, básicamente, del material, de los procesos de fabricación empleados en la obtención del mismo y de su geometría. La tensión, por su parte, es una consecuencia de la fuerza a la que está sometido dicho componente y del tamaño del mismo.

Por ello, puede decirse que el objetivo de la Resistencia de Materiales es establecer los criterios que nos permitan determinar el tipo de material, la forma y dimensiones adecuadas que hay que dar a los elementos mecánicos para que puedan resistir la acción de las fuerzas exteriores a las que están sometidos.

Dentro de este campo, en primer lugar, se debe diferenciar el tipo de fuerza exterior o carga aplicada sobre el elemento en estudio:

- Se define como **carga estática** la fuerza o momento cuya magnitud, dirección y punto de aplicación es invariable en el tiempo.
- Se define como **carga dinámica** la fuerza o momento cuya magnitud, dirección o punto de aplicación es variable en el tiempo.

Las diferentes formas de plantear el estudio de la interrelación de la resistencia de un elemento y la carga que esta aplicada sobre él, va a depender del tipo de carga a la que esté sometido, pudiendo diferenciar el estudio por resistencia de un elemento a cargas estáticas o a fatiga (cargas dinámicas).

5.2 Resistencia de elementos mecánicos bajo cargas estáticas. [35]

Para el cálculo de la resistencia en el diseño de máquinas, la situación ideal sería poder realizar probetas de ensayos de los materiales que las componen en las mismas condiciones que en su estado de servicio (acabado superficial, tratamiento, tamaño, etc.) y someterlas a las mismas solicitudes exteriores que las que sufrirán (condiciones de carga, condiciones ambientales, etc.). Esto resulta muy costoso, por lo que es justificable en situaciones de elevadas producciones de la máquina en cuestión o en el supuesto de que se pongan en peligro vidas humanas.

En el resto de situaciones, se debe ser capaz de calcular la resistencia a través de los medios de que se disponga (bibliografía, estudios previos, normas aplicables, datos técnicos de materiales, etc.) y trabajar con factores de seguridad que permitirán estimar posibles sobrecargas o defectos de materiales.

Se define el factor de seguridad como:

$$n = \frac{S}{\sigma} \quad (5.1)$$

donde S es la resistencia máxima del material y σ la tensión máxima a la que está sometido el material.

Por otro lado, resulta importante resaltar las diferencias existentes entre ductilidad y fragilidad de un material. Para ello, es de interés analizar los diagramas $\sigma - \varepsilon$ correspondientes a dicho tipo de materiales (ver figura 91).

Puede comprobarse que en un material dúctil existe una zona de deformación plástica antes de la rotura. Como las deformaciones permanentes no son deseables en nuestro elemento mecánico, se considerará como límite de tensión máxima aplicable la resistencia de fluencia (S_y). En materiales frágiles se observa que casi no existe zona de deformación plástica, por lo que el límite de tensión máxima es la resistencia de rotura o última (S_u).

Respecto a la comparación de valores absolutos de las tensiones límites a compresión y tracción se puede comprobar que en un material dúctil los límites de tensiones son de valores muy parecidos ($S_{yc} \cong S_{yt}$), mientras que, en un material frágil, el límite de tensión máxima a compresión es muy superior al límite a tracción ($S_{uc} \gg S_{ut}$) y equivalente al límite de tensión máxima a cortadura ($S_{su} \cong S_{ut}$).

En el diseño de elementos mecánicos se debe asegurar que los esfuerzos internos no superen la resistencia del material. Si se utiliza un material dúctil, el criterio que debe aplicarse como valor de resistencia del material es la resistencia de fluencia (S_y), ya que una deformación permanente sería considerada como rotura. Sin embargo, los materiales frágiles no poseen un punto de resistencia a fluencia, por lo que el criterio de trabajo será la resistencia última (S_u).

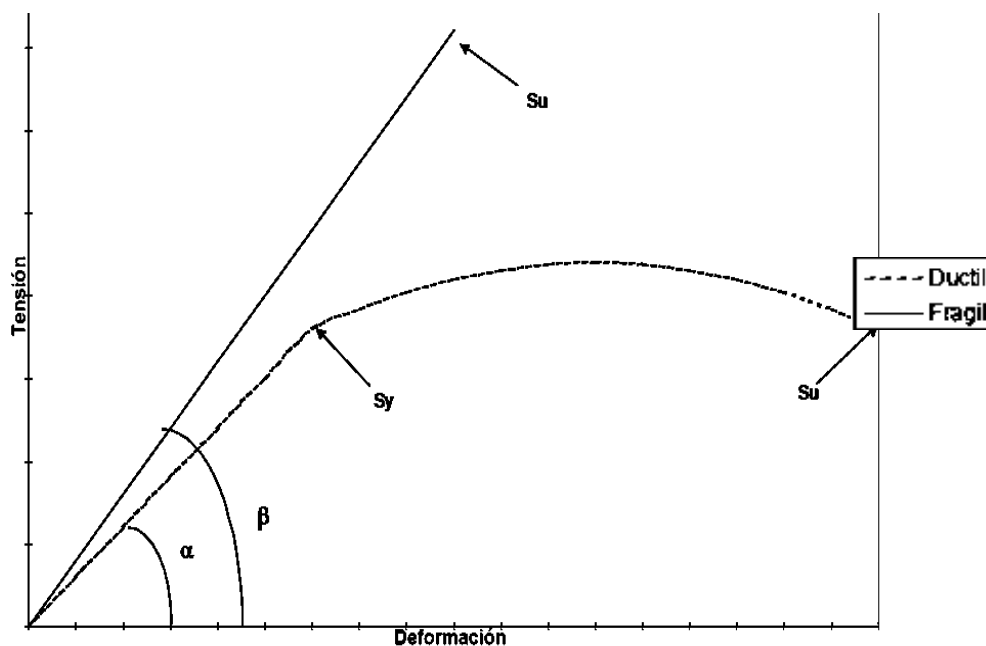


Figura 91. Diagramas tensión-deformación de materiales dúctiles y frágiles.

Utilizando estos principios, existe una amplia variedad de teorías de rotura de materiales frágiles y dúctiles bajo cargas estáticas que, aunque en este proyecto no son de interés, se enumeran a continuación.

- Teorías de rotura para materiales frágiles:
 - Teoría del Esfuerzo Normal Máximo (ENM).
 - Teoría de Coulomb-Mohr o de fricción interna (TCM).
 - Teoría del Esfuerzo Normal Máximo (ENM).
- Teorías de rotura para materiales dúctiles:
 - Teoría de Mohr modificada (TMM).
 - Teoría del Esfuerzo Cortante Máximo (ECM).
 - Teoría de la Energía de Distorsión o de Von Mises-Hencky (TVM).

5.3 Resistencia de elementos mecánicos bajo cargas dinámicas: fenómenos de fatiga. [35]

5.3.1 Introducción.

El fenómeno de fatiga se presenta en elementos mecánicos sometidos a cargas variables. Su característica principal es la rotura repentina, sin deformación debida a cargas aplicadas, muy por debajo de la resistencia del material. El hecho de que la rotura se produzca sin deformación hace que este fenómeno sea mucho más peligroso que el fallo estático, sobre todo en el caso de materiales dúctiles, en los que la rotura estática se alcanza superada la fluencia, existiendo una deformación permanente previa que avisa de su inminente rotura.

Estadísticamente es mucho mayor el número de piezas o elementos mecánicos que fallan súbitamente por fatiga que por fallo estático.

5.3.2 Características de la rotura por fatiga.

Las fallas por fatiga comienzan en una grieta, producida por un defecto del proceso de fabricación (laminación, moldeo, mecanizado, forja extrusión...) o por los esfuerzos dinámicos actuantes en las zonas de las piezas afectadas por un concentrador de tensiones (cambios bruscos de sección, agujeros radiales para pasadores, chaveteros, ranuras para anillo elásticos, roscas.....). Por tanto un aspecto de vital importancia en el diseño de elementos de máquinas sometidos a cargas dinámicas será minimizar el número e intensidad de los concentradores de tensiones.



Figura 92. Zonas de fallo por fatiga en el eje del accidente de Viareggio 2009.

En el mecanismo de falla por fatiga, se distinguen tres etapas (ver figura 92):

1) Iniciación de la grieta: Microscópicamente, la mayoría de materiales utilizados en la construcción de maquinaria, no son ni homogéneos (propiedades del material uniformes), ni isotrópicos (propiedades del material independientes de la orientación de la fibra). Además, existen determinadas zonas de elementos de máquinas, sometidas a concentración de tensiones lo que, bajo cargas alternantes, puede producir una fluencia localizada en determinados puntos de dichos elementos. A medida que el tiempo pasa, van apareciendo unas grietas microscópicas, aun cuando la tensión nominal en la sección esté muy por debajo del límite elástico del material (S_y). El fenómeno de fluencia localizada, lo acusan más fácilmente los materiales dúctiles.

2) Crecimiento de las grietas: Una vez producida una microgrieta, actúan los mecanismos de la mecánica de la fractura (donde es de gran interés el factor de intensidad de tensiones, K), que, en función de la geometría, la carga aplicada y la longitud de la fisura tendrá diferentes expresiones) y es aplicable la ley de Paris de propagación de fisuras. La teoría de la mecánica de la fractura y la ley de Paris son especialmente adecuadas para el cálculo de la vida útil de piezas de elementos de máquinas, una vez descubierta una grieta, mediante la inspección periódica.

3) Fractura o falla

Como ya se ha comentado, el origen de la rotura por fatiga es un punto de concentración de tensiones en la superficie de la pieza. La apariencia de la superficie de fractura de un elemento por fatiga, muchas veces aporta información sobre las condiciones de trabajo y rotura del mismo. Se puede analizar, por ejemplo la rotura de un eje de transmisión (figura 93), en donde se aprecian tres zonas claramente diferenciadas.

La primera de dichas zonas abarca más de la mitad de la sección del eje. Tiene un aspecto liso conoidal y representa estados de propagación de la grieta inicial, cuyo origen es el borde anguloso de la chaveta (punto de concentración de tensiones). Esta grieta inicial se ha propagado lentamente de forma asimétrica, lo que es típico de las fracturas por fatiga en ejes rotatorios. Existe una tendencia de la grieta a propagarse preferentemente en la dirección opuesta a la de rotación del eje, por lo que se deduce que el sentido del giro era horario.

La segunda zona, de velocidad de propagación de la grieta más rápidamente, cubre casi el resto de la sección del eje y presenta un aspecto rugoso característico.

La tercera zona es donde se produce la fractura final, que tiene lugar de una forma dúctil y aparece como una pequeña área oscura a la derecha de la sección. El tamaño de esta sección refleja las pequeñas cargas a las que estaba sometido el eje. Su aspecto indica las características del material, así si la rotura tiene un aspecto cristalino el material es frágil mientras que si su aspecto es fibroso el material es dúctil.

En la figura 94 se observan de manera más esquemática las partes de rotura por fatiga indicadas en los párrafos anteriores.

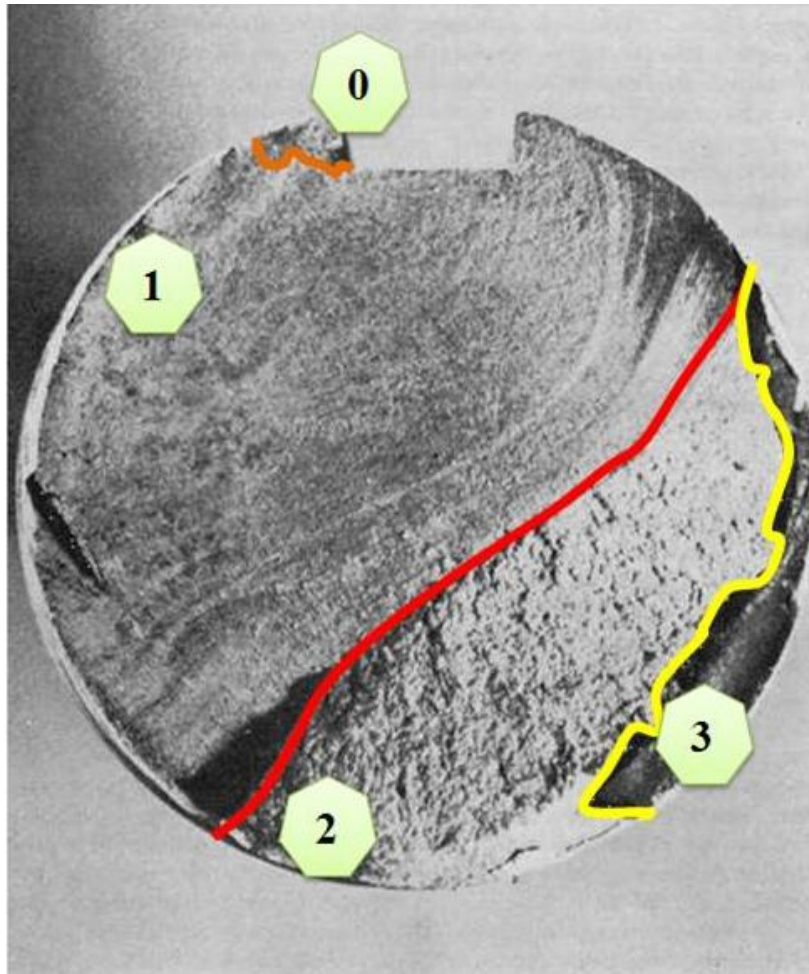


Figura 93. Propagación de una fisura en un eje de transmisión I.

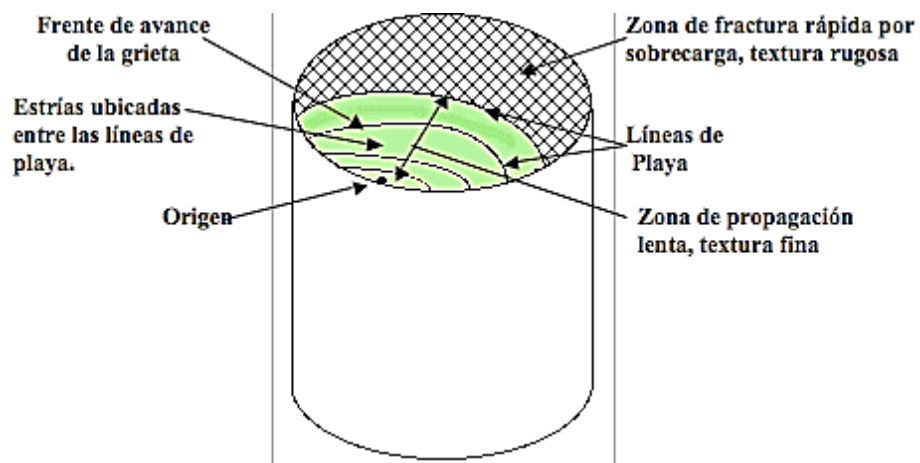


Figura 94. Propagación de una fisura en un eje de transmisión II.

5.3.3 Diagrama de fatiga (S-N). Resistencia a la fatiga y límite de fatiga.

En el inicio de los estudios de rotura por fatiga de elementos mecánicos se supuso que el origen de las mismas se encontraba en alguna imperfección del material (discontinuidades, oclusiones, coqueas, etc.). Para poder estudiar el fenómeno se diseñó un ensayo en el cual se sometía a una probeta de sección circular a un esfuerzo de flexión fijo mientras giraba. De esta forma, y normalizando las características geométricas de la probeta y ambientales del laboratorio, surge el ensayo de viga rotatoria. Realizando este ensayo múltiples veces (mínimo 8 ensayos) y modificando sucesivamente el esfuerzo de flexión, obtenemos el número de ciclos que aguantaría la probeta a fatiga.

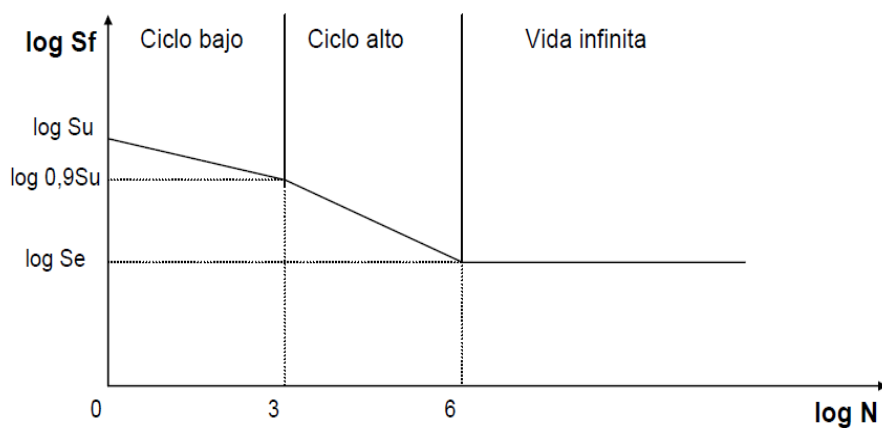


Figura 95. Curva de Woehler.

De esta forma se obtiene el diagrama de fatiga, curva $S - N$ o curva de Woehler (ver figura 95), que muestra la resistencia a fatiga del material para diferentes números de ciclos. Este diagrama se representa en escala logarítmica.

Se puede apreciar que existe un valor de tensión por debajo del que la duración de la probeta es infinita, es decir, no rompe. La tensión a la que se produce este efecto se conoce como límite de fatiga de la viga rotatoria o límite de fatiga sin corregir (S_e'). Este punto, para los aceros, se encuentra aproximadamente entre $10^6 - 10^8$ ciclos.

En la zona de vida finita se pueden diferenciar dos tendencias. La primera entre $1 - 10^3$ ciclos, donde se produce una reducción progresiva muy tenue del valor de la tensión para la rotura. En esta parte de la gráfica, denominada de fatiga de ciclo bajo, el material se comporta de manera muy similar a como lo hace frente a cargas estáticas, pero con una leve reducción de la resistencia (a 10 ciclos aproximadamente un 10% de reducción de la resistencia (S_u)). La segunda tendencia, llamada de fatiga de ciclo alto ($10^3 - 10^6$ ciclos), muestra una reducción mucho más brusca de la tensión para la rotura con la duración, comprobándose que el material se comporta de manera distinta a como lo hace frente a cargas estáticas.

Es necesario puntualizar que, generalmente, la línea asintótica horizontal del diagrama $S - N$, para metales no ferrosos y sus aleaciones, suele tener una ligera pendiente negativa lo que indica que estos materiales no poseen límite a fatiga.

En el caso de aleaciones ferrosas, cuando no se disponga de datos experimentales para el cálculo del límite de fatiga se puede utilizar el siguiente criterio:

$$\text{Hierro y aceros forjados} \begin{cases} S'_e = 0.5 \cdot S_{ut} & \text{si } S_{ut} \leq 1400 \text{MPa} \\ S'_e = 700 \text{MPa} & \text{si } S_{ut} \geq 1400 \text{MPa} \end{cases}$$

$$\text{Aceros colados} \begin{cases} S'_e = 0.45 \cdot S_{ut} & \text{si } S_{ut} \leq 600 \text{MPa} \\ S'_e = 275 \text{MPa} & \text{si } S_{ut} \geq 600 \text{MPa} \end{cases}$$

5.3.4 Factores modificativos del límite a fatiga.

El valor obtenido del límite de fatiga en el ensayo de viga rotatoria es válido para las condiciones precisas que indica el protocolo de dicho ensayo. Para poder utilizar los datos obtenidos del mismo hay que adecuar el límite a fatiga a las características del elemento mecánico que se pretende analizar corrigiéndolo mediante una serie de factores denominados **factores modificativos del límite de fatiga**. El resultado de la aplicación de estos factores es la obtención del límite a fatiga corregido (S_e) para un elemento mecánico, lo que se define como el valor de la tensión alternante máxima que permite conseguir una vida infinita del mismo en las condiciones de funcionamiento.

Experimentalmente se sabe que los factores que modifican el límite de fatiga son:

- Factor de acabado superficial (K_a).
- Factor de tamaño (K_b).
- Factor de confiabilidad (K_c).
- Factor de temperatura (K_d).
- Factor de concentración de tensiones (K_e).
- Factor de efectos diversos (K_f).

La ecuación que relaciona el límite de fatiga en el ensayo de viga rotatoria (S'_e), el límite de fatiga corregido (S_e) y los factores modificativos del límite de fatiga (K_i) se denomina **ecuación de Marin (5.2)**:

$$S_e = K_a \cdot K_b \cdot K_c \cdot K_d \cdot K_e \cdot K_f \cdot S'_e \quad (5.2)$$

5.3.4.1 Factor de acabado superficial (K_a).

En el ensayo de viga rotatoria la probeta recibe un pulimento final fino en dirección axial. Se puede comprobar que acabados superficiales peores reducen el límite de fatiga y que esta reducción es tanto mayor cuanto mayor es la resistencia última del material (S_u).

La causa de esta reducción es debida a que, al existir mayor rugosidad en la superficie, se produce un fenómeno de concentración de tensiones en la misma.

La forma de obtener el valor del factor de acabado superficial (K_a) es a través de la ecuación (5.3), hallada por correlación estadística de un número lo suficientemente elevado de resultados experimentales:

$$K_a = a \cdot S_{ut}^b \quad (5.3)$$

donde a y b vienen dados por la tabla 2:

Tabla 2. Valores de a y b para el cálculo del factor de acabado superficial.

Acabado superficial	Coeficiente a (MPa)	Exponente b
Pulido	1	0
Acabado fino (esmerilado, rectificado,)	1.58	-0.085
Mecanizado sin acabar/estirado en frío	4.51	-0.265
Laminado en caliente	57.7	-0.718
Forjado	272	-0.995

En la figura 96 se aprecia la tendencia de K_a para el acero.

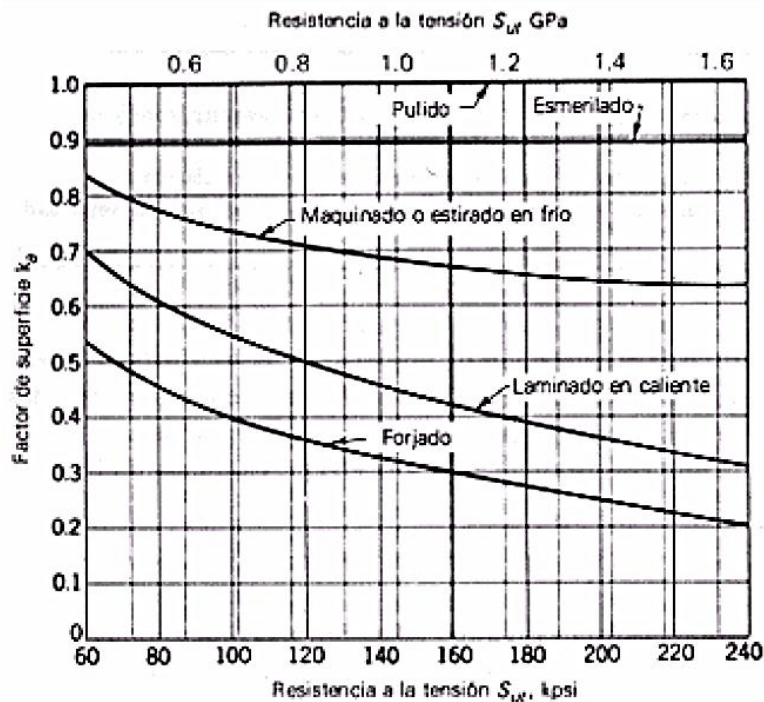


Figura 96. Variación del factor de acabado superficial con la resistencia última del material.

5.3.4.2 Factor de tamaño (K_b).

Los diámetros de las probetas utilizadas en el ensayo de viga rotatoria tienen unas dimensiones 7.5 y 12.5 mm. Sin embargo, la pieza que se desee analizar puede tener diámetros muy distintos a los de la probeta, presentándose la tendencia general de que, cuanto mayor es el diámetro, menor es el límite de fatiga.

La forma de evaluar este factor, para el caso de flexión y torsión, es por medio de la ecuación (5.4):

$$\left\{ \begin{array}{ll} K_b = \left(\frac{d}{7.62} \right)^{-0.1133} & \text{si } 2.79 \leq d \leq 51 \\ K_b = 1.189 \cdot d^{-0.097} & \text{si } 52 \leq d \leq 250 \end{array} \right\} \quad (5.4)$$

siendo expresado el diámetro (d) en mm.

Para el caso de carga axial, el valor del factor de tamaño es 1, ya que, en dicha situación, el tamaño no influye en el límite de fatiga.

Para poder utilizar esta expresión en el caso de elementos mecánicos de secciones no circulares es necesario definir el diámetro efectivo, de manera que la reducción porcentual del límite de fatiga de una probeta con un diámetro igual al diámetro efectivo, sea igual a la reducción porcentual del límite de fatiga de la sección del sólido que se está considerando. Este diámetro efectivo se determina a partir del área del 95% del esfuerzo, que se designará como $A_{0.95}$.

En una sección sometida a alguna sollicitación, se presentará una distribución de tensiones a lo largo de la misma de tal manera que, en algún punto, ésta será máxima. A medida que la sollicitación varía, la distribución de tensiones también lo hará, existiendo otro valor de tensión máxima. Si analizamos todas las tensiones máximas según varía el esfuerzo alternante, se obtendrá un valor máximo total. Así, **el área de 95% de esfuerzo** se define como el área limitada por los puntos de la sección que en algún momento están sometidos a una tensión mayor o igual que el 95% del máximo absoluto. De este modo, se define el **diámetro efectivo de una sección** como el diámetro de una probeta de sección circular sometida a flexión rotatoria, que tenga un área de 95% del esfuerzo igual al área de 95% del esfuerzo de la sección considerada.

En el caso de una sección de viga rotatoria, el área de 95% de esfuerzo es la de un anillo que tenga un diámetro exterior d y uno interior igual a $0.95d$ y viene dada por la ecuación (5.5).

$$A_{0.95} = \frac{\pi}{4} [d^2 - (0.95 \cdot d)^2] = 0.0766d^2 \quad (5.5)$$

La expresión (5.5) también es válida para un elemento rotatorio hueco circular.

En el caso de vigas redondas, macizas o huecas, el área de 95% de esfuerzo es dos veces mayor que el área exterior de dos cuerdas paralelas con un espaciamiento de $0,95d$, donde d es el diámetro. Realizando un cálculo exacto se obtiene el valor dado por (5.6):

$$A_{0,95} = 0,0105d^2 \quad (5.6)$$

Igualando las dos expresiones anteriores se obtiene el diámetro efectivo de la viga redonda correspondiente a una viga maciza o hueca no rotatoria (5.7):

$$d_e = 0,370 \cdot d \quad (5.7)$$

Si se quiere calcular el diámetro efectivo de una sección rectangular de dimensiones hxb , se utiliza la expresión (5.8):

$$A_{0,95} = 0,05 \cdot h \cdot b \quad (5.8)$$

Aplicando un cálculo análogo al anterior realizado, se obtiene el diámetro efectivo de la sección rectangular, dado por (5.9):

$$d_e = 0,808 \cdot (h \cdot b)^{1/2} \quad (5.9)$$

5.3.4.3 Factor de confiabilidad (K_c).

El factor de confiabilidad (K_c) permite, de forma analítica, diseñar un elemento mecánico sometido a cargas de fatiga de manera que tenga una vida deseada con una determinada confiabilidad. Esto es debido al comportamiento estadístico de los ensayos que se realizan. El comportamiento de la distribución del análisis de resistencias y esfuerzos es de tipo normal o Weibull.

Así, los valores que tenemos para K_c en función de la confiabilidad se encuentran en la tabla 3.

Tabla 3. Valores del factor de confiabilidad.

<i>Confiabilidad</i>	<i>Factor de confiabilidad K_c</i>
0.5	1
0.9	0.897
0.95	0.868
0.99	0.814
0.999	0.753
0.9999	0.702
0.99999	0.659
0.999999	0.620
0.9999999	0.584
0.99999999	0.551
0.999999999	0.520

5.3.4.4 Factor de temperatura (K_d).

Se sabe que la temperatura modifica todas las propiedades mecánicas de un material, además de las resistencias a fluencia, última y de fatiga. Esto llega a crear la situación de que materiales que operan a altas temperaturas no poseen límite de fatiga, igual que ocurre con las aleaciones de aluminio anteriormente mencionadas.

La causa que explica este fenómeno es que las altas temperaturas movilizan las dislocaciones originando la conversión de un proceso de rotura esencialmente independiente en del tiempo, en uno que sí depende de él. Existen, asimismo, interacciones complejas en las que interviene el flujo plástico debido a esfuerzos estáticos o de valor medio, la atmósfera ambiental y el proceso de fatiga.

La obtención del valor del factor de temperatura resulta difícil. De hecho, es recomendable la realización de pruebas de laboratorio para su determinación. El criterio que se indica a continuación, en la ecuación (5.10) es válido para la resolución de problemas relativamente sencillos.

$$\left\{ \begin{array}{ll} K_d = 1 & \text{si } T \leq 450^\circ\text{C} \\ K_d = 1 - 5,8 \cdot 10^{-3} \cdot (T - 450) & \text{si } 450^\circ\text{C} \leq T \leq 550^\circ\text{C} \end{array} \right\} \quad (5.10)$$

5.3.4.5 Factor de concentración de tensiones (K_e).

Un gran número de elementos mecánicos tienen agujeros, ranuras, chavetas, muescas u otras clases de discontinuidades que alteran la distribución del esfuerzo. En base a esto, resulta necesario considerar las siguientes ecuaciones, (5.11) y (5.12), relacionadas con las tensiones en zonas con presencia de estas discontinuidades:

$$\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_0 \quad (5.11)$$

$$\tau_{max} = K_{ts} \cdot \tau_0 \quad (5.12)$$

donde:

- σ_0 y τ_0 deben ser calculados por la ecuación de tensiones y para el área neta de la sección.
- K_t y K_{ts} son factores de concentración de tensiones teóricos. No necesitan ser aplicados en el caso de esfuerzos estáticos de materiales dúctiles pero sí en materiales de alta resistencia, baja ductilidad, endurecimientos superficiales y/o trabajados en frío intensamente.

Es importante indicar que la concentración de esfuerzos también se debe considerar cuando los elementos están sometidos a carga de fatiga. Sin embargo, aun en estas condiciones, se encuentra que algunos materiales no son muy sensibles a la existencia de discontinuidades.

La forma de evaluar el valor del factor de concentración de tensiones es a través de las expresiones y conceptos que se definen a continuación:

- $\mathfrak{R}_f = \text{Lím. fatiga probetas sin discount.} / \text{Lím. fatiga probetas con discount.}$ es el factor de reducción de la resistencia en caso de fatiga.
- q es el factor de sensibilidad a las ranuras (depende del material).

$$K_e = \frac{1}{\mathfrak{R}_f} \quad (5.13)$$

$$q = \frac{\mathfrak{R}_f - 1}{K_t - 1} \quad (5.14)$$

El proceso de obtención del factor de concentración de tensiones es el siguiente:

1. Cálculo del factor de concentración de tensiones teórico (K_t) por configuración geométrica o por las tablas que se muestran de la figura 99 a la 111.
2. Determinación de la sensibilidad a ranuras (q) a partir de las figuras 97 y 98.
3. Aplicación de las ecuaciones anteriores para la obtención de \mathfrak{R}_f .
4. Aplicación de las ecuaciones anteriores para la hallar el valor de K_e .

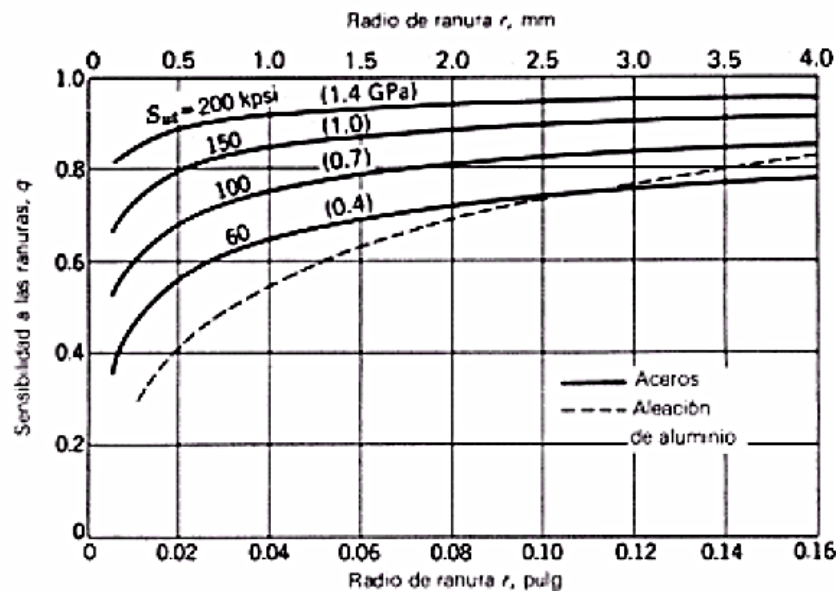


Figura 97. Sensibilidad a las ranuras. Cargas de flexión y axiales alternantes. Para radios de ranura mayores usar valores de q correspondientes a $r = 4$ mm.

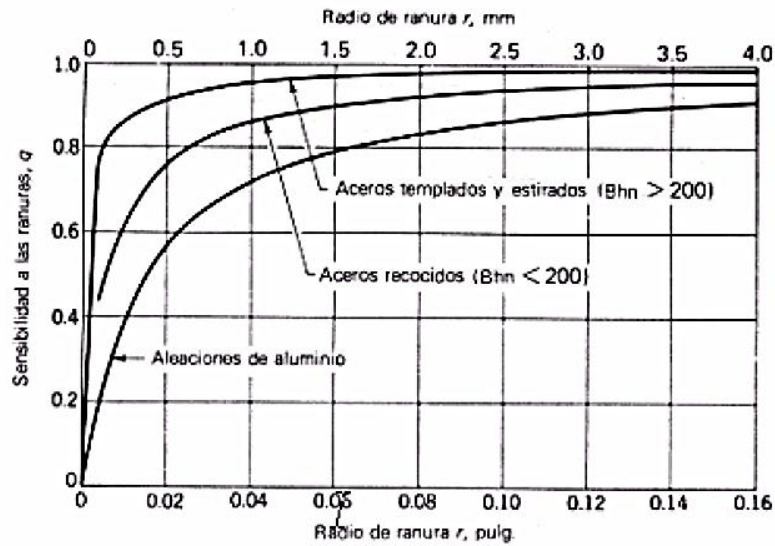


Figura 98. Sensibilidad a las ranuras. Cargas de torsión alternantes. Para radios de ranura mayores usar valores de q correspondientes a $r = 4$ mm.

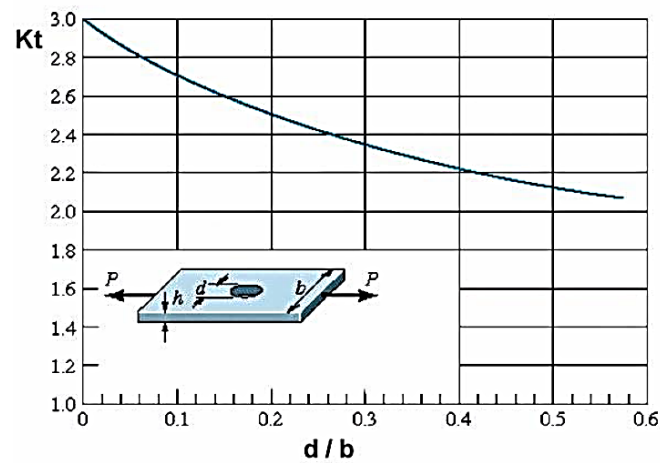


Figura 99. Barra de sección rectangular en tensión o compresión simples con un agujero transversal.

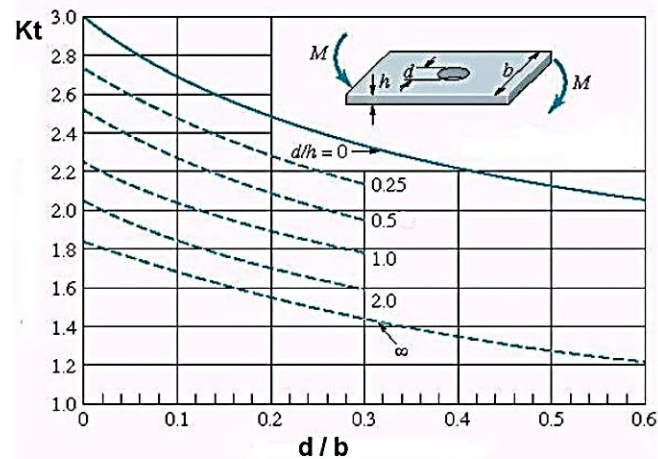


Figura 100. Barra de sección rectangular en flexión simple con un agujero transversal.

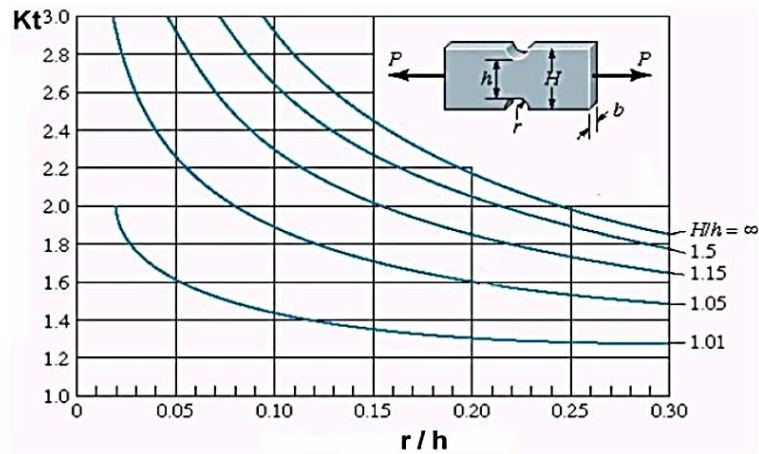


Figura 101. Barra de sección rectangular en tensión o compresión simples con dos muescas o recortes circulares.

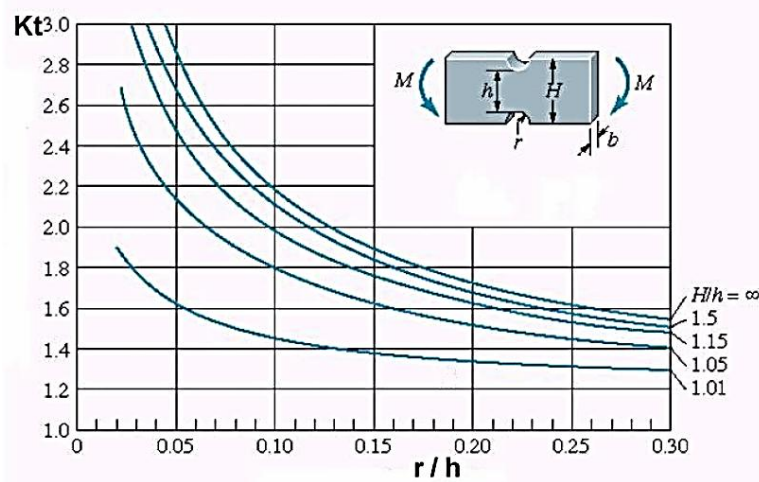


Figura 102. Barra de sección rectangular en flexión con dos muescas o recortes circulares.

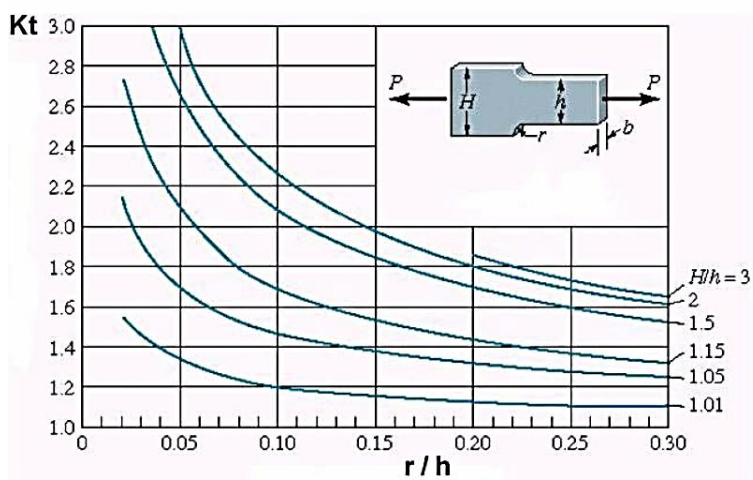


Figura 103. Barra de sección rectangular en tensión o compresión simples con estrechamiento y entalles.

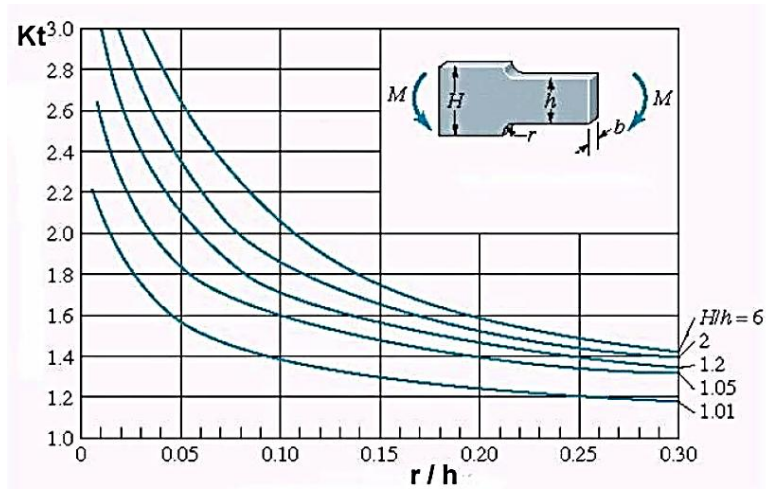


Figura 104. Barra de sección rectangular en flexión con estrechamiento y entalles.

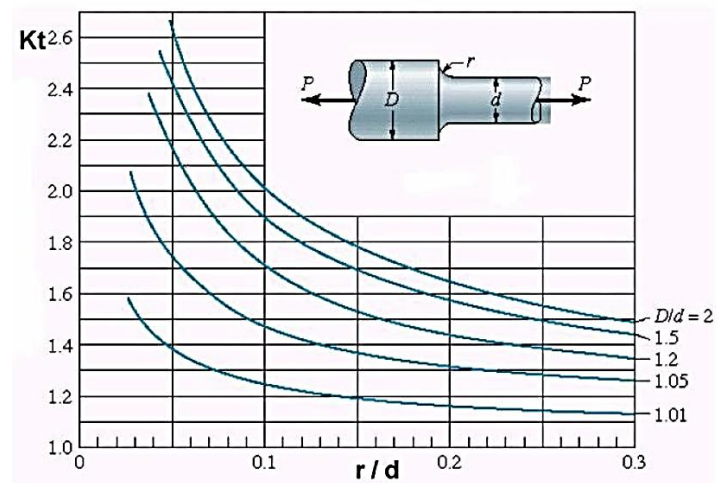


Figura 105. Barra de sección circular en tracción con estrechamiento y entalles.

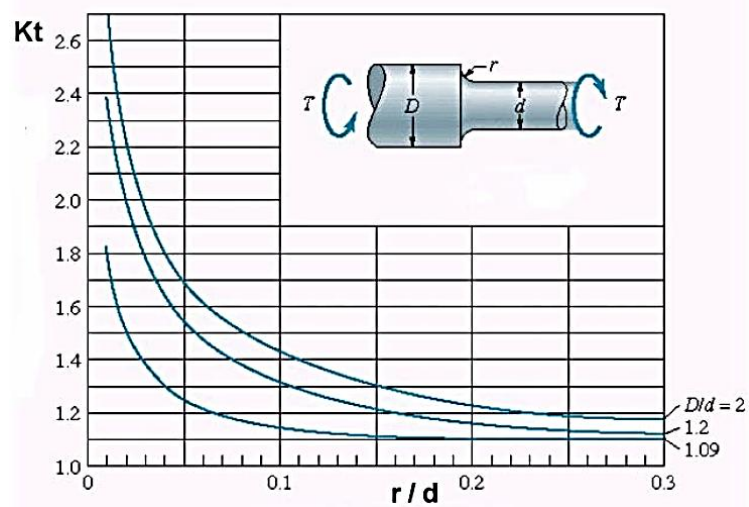


Figura 106. Barra de sección circular en torsión con estrechamiento y entalles.

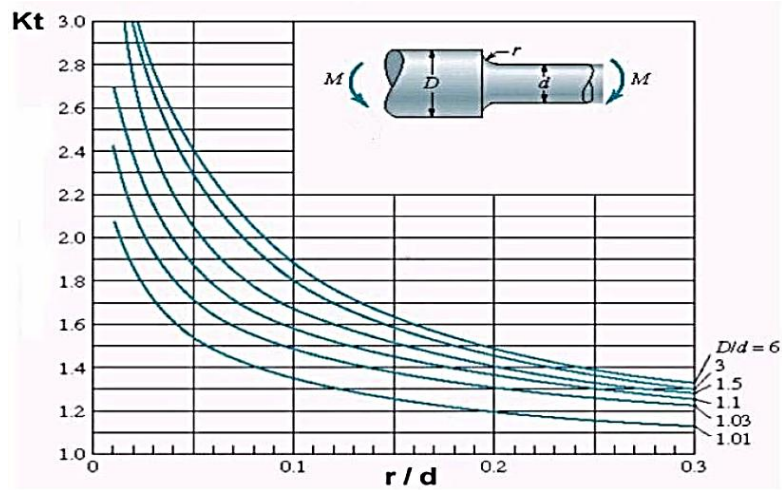


Figura 107. Barra de sección circular en flexión con estrechamiento y entalles.

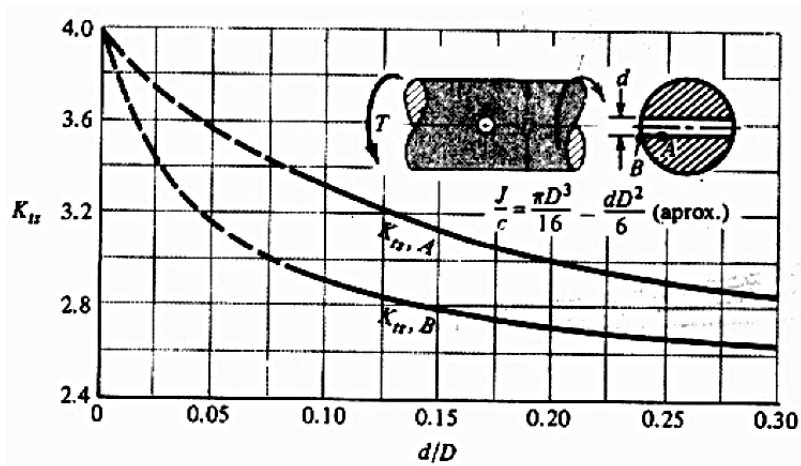


Figura 108. Barra de sección circular en torsión con un agujero transversal.

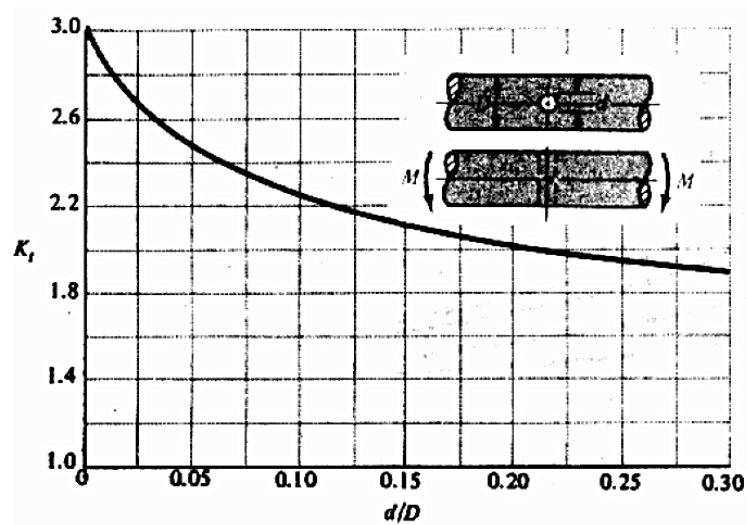


Figura 109. Barra de sección circular en flexión con un agujero transversal.

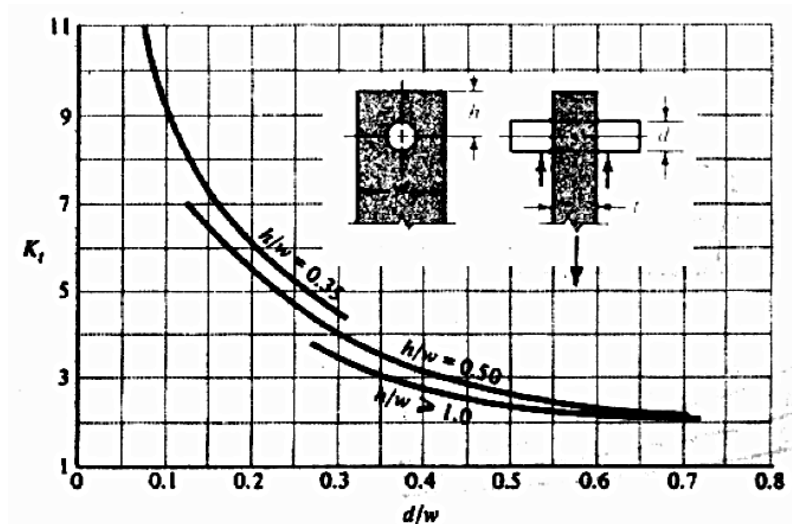


Figura 110. Placa cargada en tensión con un pasador en agujero transversal.

	Chaveta (o cuña) con talón		Chaveta (o cuña) extremos fresados	
	Chaveteros. $K_e = 1 / K_f$			
Acero	Factor de concentración de esfuerzos por fatiga o reducido K_f			
	Flexión	Torsión	Flexión	Torsión
Aleados ($< 200 H_B$)	1.3	1.3	1.6	1.3
Templado y revenido ($\geq 200 H_B$)	1.6	1.6	2.0	1.6

Figura 111. Factor de concentración de tensiones para chaveteros.

5.3.4.6 Factor de efectos diversos (K_f).

El factor de efectos diversos se utiliza para modificar el límite de fatiga en función de otras características no analizadas hasta ahora y que pueden afectarlo. Normalmente es necesaria la realización de experimentos especiales para cuantificarlo. A continuación se analizan los más importantes:

- Efectos residuales o remanentes: Son consecuencia de la modificación del límite de fatiga debido a las operaciones de manipulación como chorreado de arena, martillado y laminado en frío, que originan esfuerzos de compresión en la superficie de la pieza y ayudan a mejorar el límite de resistencia a la fatiga.

- Características direccionales operacionales: En piezas provenientes de estirado, laminación o forja, el límite de resistencia a la fatiga en dirección transversal es un 10-20% inferior que en dirección longitudinal.
- Efectos del temple superficial: Debido a los diferentes valores de los límites de fatiga del núcleo de un elemento con temple superficial y de la capa templada se pueden sobrepasar estos valores en la zona de unión del temple al núcleo (ver figura 112).

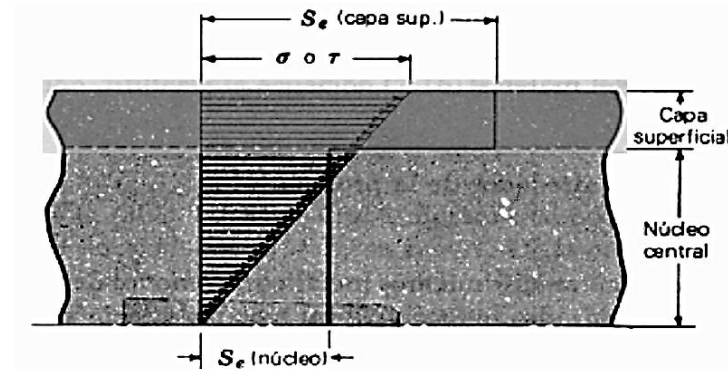


Figura 112. Límite a fatiga en la unión del núcleo central y capa superficial de una pieza templada.

- Efectos de la corrosión: La corrosión disminuye la resistencia a la fatiga ya que se crean puntos de concentración de esfuerzos.
- Recubrimiento electrolítico: Los recubrimientos electrolíticos suelen producir disminución de los límites de fatiga. Así, por ejemplo, en los procesos de cromado, niquelado o cadmiado se puede producir una reducción del límite en un 50%, en piezas o elementos de aleaciones ligeras sometidos a flexión con oxidación anódica existe una reducción de un 39%, mientras que a torsión y en galvanizados no afecta al límite de fatiga.
- Corrosión por apriete (fretage): Este fenómeno se produce por el movimiento microscópico en la superficie de piezas mecánicas o estructuras estrechamente ajustadas (juntas atornilladas, cojinetes, etc...). Este proceso se reconoce por la existencia de cambio de color en la superficie, picadura y, eventualmente, fatiga. Este factor puede variar entre 0.24 – 0.9.

5.3.5 Tensiones fluctuantes.

En muchas situaciones es necesario calcular la resistencia de una pieza en estados de esfuerzos alternativos. De la figura 113 a la 116 son representados distintos tipos de esfuerzos que teóricamente podemos encontrar.

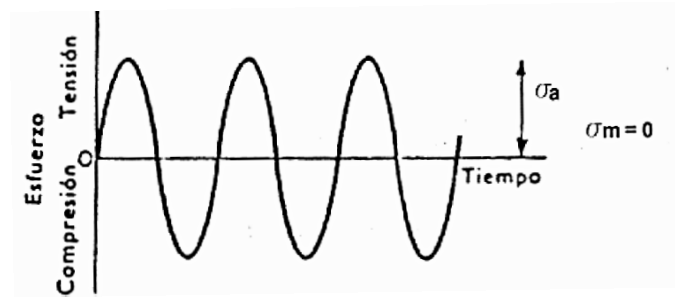


Figura 113. Esfuerzo alternante.

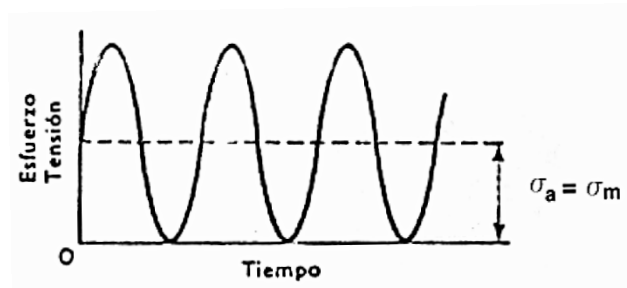


Figura 114. Tensión pulsante.

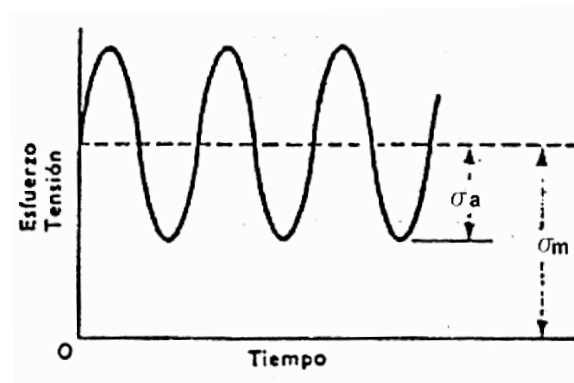


Figura 115. Tensión fluctuante.

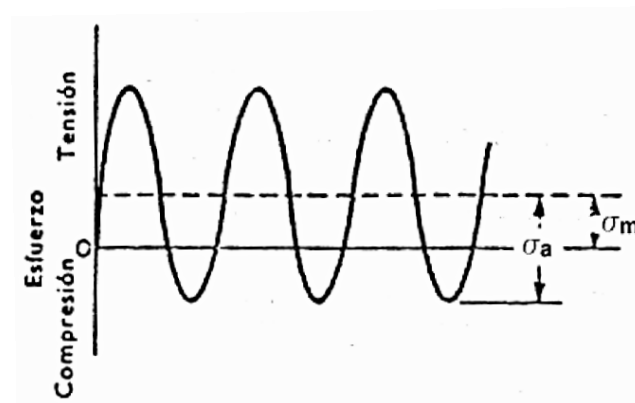


Figura 116. Esfuerzo fluctuante.

Así se definen los siguientes parámetros:

- σ_{max} : Tensión máxima.
- σ_{min} : Tensión mínima.
- σ_a : Amplitud de tensión o tensión alternante.
- σ_m : Tensión media.
- σ_r : Intervalo total de tensión.
- σ_s : Tensión estática o estacionaria.

Es necesario indicar que el $\sigma_s \neq \sigma_m$. De hecho el esfuerzo estático puede tener cualquier valor entre el máximo y el mínimo.

El procedimiento a seguir para el estudio de los estados de tensiones mencionados consiste en descomponer la carga en sus componentes media y alternante, tal y como se indica en (5.15) y (5.16)

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \quad (5.15) \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \quad (5.16)$$

De esta forma, se supone el estado tensional resultante como la superposición de un estado de carga constante (producido por la tensión media) y otro de carga alternante (producido por la componente alternante). El problema se tratará buscando una relación entre la componente alternante de tensión y la duración esperada del elemento, pero con la salvedad de que la presencia de tensión media supondrá una disminución de los valores de la resistencia.

En la figura 117 se ve la variación de los valores de la tensión total en función de la tensión media. Sin embargo, resulta mejor analizar la figura 118 que es la representación de la variación de la tensión alternante respecto a la tensión media.

En el diseño de componentes mecánicos se suele emplear un diagrama $\sigma_m - \sigma_a$ semejante al de la figura 118, relacionándose el valor de la componente alternante que, para cada valor de la tensión media, produce el fallo a un cierto número de ciclos N .

De esta forma, se realizan ensayos con distintos valores de la tensión media, y se miden los valores de la componente alternante que produce rotura a N ciclos. Los puntos (σ_m, σ_a) que se obtienen se representan en el diagrama y se obtiene una nube de los mismos que, posteriormente, se intentan correlacionar dando lugar a diferentes teorías de fallo. Las correlaciones que se han encontrado constituyen una aproximación razonable, pero los resultados presentan bastante dispersión, por lo que se recomienda el uso de factores de seguridad elevados.

La mayoría de estas teorías de fallo se encuentran relacionadas con la curva de Woehler y utilizan conceptos derivados de ella (lo que conlleva que el diagrama de tensión alternante en función de la tensión media también se encuentra relacionado con las curvas $S - N$). Así,

suponiéndose que la resistencia a la fatiga para esos N ciclos (obtenida de dicha curva) es S_f , para la tensión media nula, la resistencia alternante (el valor de la componente alternante para fallo a N ciclos) es S_f . Por su parte, para tensión alternante nula (carga estática) la resistencia media o valor de la tensión media para fallo es S_{ut} , tal y como se observa en la figura 118.

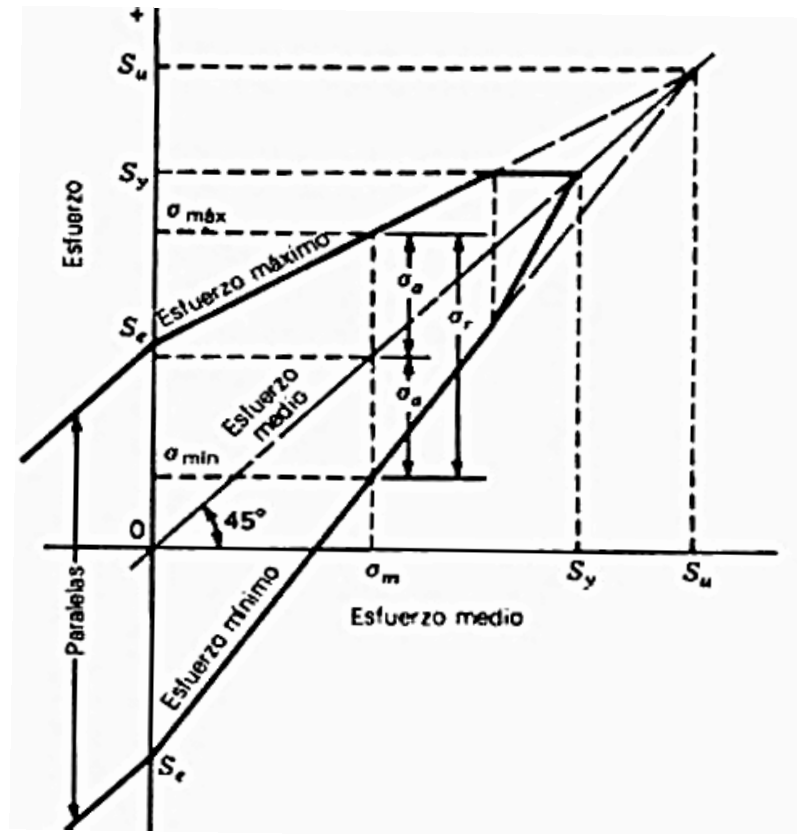


Figura 117. Tensión total en función de la tensión media.

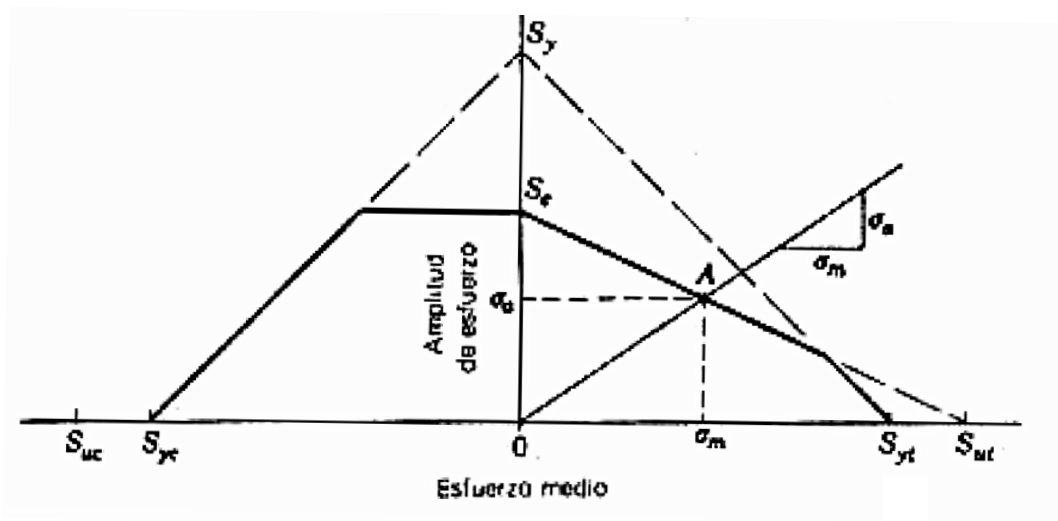


Figura 118. Tensión alternante en función de la tensión media.

Hay que tener en cuenta que si el número de ciclos considerado fuese 10^6 , el valor de la resistencia alternante sería el límite de fatiga corregido S_e (vida infinita).

A continuación se explican algunas de las teorías de fallo a fatiga.

5.3.5.1 Criterio de Goodman.

Según el criterio de Goodman, la variación de la resistencia alternante con la tensión media se describe mediante una recta que pasa por S_f y S_{ut} , de manera que la rotura a N ciclos se produce cuando se cumple la expresión (5.17).

$$\frac{\sigma_a}{S_f} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} = 1 \quad (5.17)$$

Puesto que la ecuación de Goodman proporciona tanto los valores máximos de la tensión alternante (asemejables a la resistencia alternante) para cada tensión media, como valores máximos de la tensión media (asemejables a resistencia media) para cada tensión alternante, se acostumbra a escribir dicha ecuación en términos de resistencia según (5.18):

$$\frac{S_a}{S_f} + \frac{S_m}{S_{ut}} = 1 \quad (5.18)$$

El criterio de Goodman constituye una más que aceptable aproximación a la realidad y presenta la gran ventaja de expresarse mediante una relación lineal, por lo que es la teoría de fallo a fatiga más utilizada en la práctica.

5.3.5.2 Criterio de Soderberg.

La teoría que emplea el criterio de Soderberg también es lineal y predice que, en ausencia de tensión media, la rotura se produce cuando $\sigma_a = S_f$. Sin embargo, para tensión alternante nula (carga estática) el fallo, si el material es dúctil, se produce para $\sigma_m = S_{yt}$. Para tensiones medias la variación es según una recta. Así la condición de fallo a N ciclos se establece cuando se cumple (5.19):

$$\frac{S_a}{S_f} + \frac{S_m}{S_{yt}} = 1 \quad (5.19)$$

En la mayoría de los casos esta teoría plantea resultados conservadores, por lo que se utiliza menos que la de Goodman.

5.3.5.3 Criterio de Gerber.

Por el contrario la teoría correspondiente al criterio de Gerber no es lineal y supone que la variación de σ_a con σ_m se representa mediante una parábola cuyo vértice es el punto $(0, S_f)$, su eje el de ordenadas y pasa por el punto $(S_{ut}, 0)$. Así la condición de fallo a N ciclos se establece como se indica en (5.20):

$$\frac{S_a}{S_f} + \left(\frac{S_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1 \quad (5.20)$$

5.3.5.4 Comparación de criterios.

En la figura 119 se aprecian los tres criterios representados en un diagrama $\sigma_m - \sigma_a$.

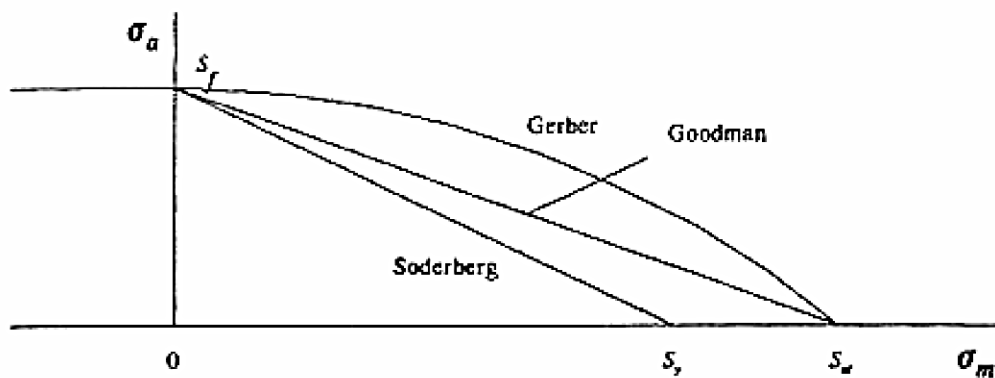


Figura 119. Comparación de criterios de fallo a fatiga para un determinado número de ciclos.

El criterio de Soderberg previene contra el fallo por fluencia, en el sentido de que seguridad a fatiga conlleva seguridad a fluencia, es decir, asegura que la tensión máxima nunca superará el valor de la resistencia de fluencia. Esto no ocurre con las otras dos teorías. Considérese por ejemplo el caso de tener tensión alternante nula y tensión media inferior a S_{ut} pero superior a S_{yt} . Según Goodman y Gerber, no se producirá la rotura, y sin embargo, se habría alcanzado la fluencia. La explicación es que, en estos casos, la pieza falla por fluencia y no por fatiga.

Por otro lado, la experiencia muestra que tensiones medias de compresión no afectan a la resistencia alternante. Consecuentemente, para valores negativos de σ_m todos los criterios anteriores se representan como líneas horizontales con ordenada S_f , tal y como se indica en la figura 119. Ello no quiere decir que sean posibles valores indefinidamente grandes de la tensión media si la alternante no supera S_f , pero en tal caso la rotura se producirá por fluencia y no por fatiga.

5.3.6 Límite de fatiga bajo tensiones fluctuantes.

Se ha comprobado que los diagramas de Goodman, Gerber y Soderberg se refieren a una duración determinada, infinita o no, según la ordenada en el origen que se escoja. Así, por ejemplo, se tendrá un diagrama de Goodman diferente para cada duración.

Planteando el problema de forma inversa, es de interés conocer qué duración tendrá un elemento del que se conoce S_e y S_{ut} , sometido a un estado tensional $\sigma_m - \sigma_a$ dado. Para ello se trazaría la recta o parábola, según el criterio empleado, que pase por los puntos $(S_{ut}, 0)$, $(S_{yt}, 0)$ si se emplea el criterio de Soderberg, y (σ_m, σ_a) , y ver donde corta al eje de ordenadas. Posteriormente se introducirá ese valor en el diagrama de fatiga, perfectamente determinado con S_e y S_{ut} , estimándose, de este modo, la duración.

Resolviendo lo expuesto de manera analítica se tienen las expresiones (5.21) y (5.22).

$$\frac{\sigma_a}{S_f} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} = 1 \Rightarrow S_f = \frac{\sigma_a}{1 - \frac{\sigma_m}{S_{ut}}} = \frac{S_{ut}}{S_{ut} - \sigma_m} \cdot \sigma_a \quad (5.21)$$

$$\frac{\sigma_a}{S_f} + \left(\frac{\sigma_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1 \Rightarrow S_f = \frac{\sigma_a}{1 - \left(\frac{\sigma_m}{S_{ut}}\right)^2} = \frac{S_{ut}^2}{S_{ut}^2 - \sigma_m^2} \cdot \sigma_a \quad (5.22)$$

Estas expresiones son válidas cuando se aplican los criterios de Goodman y Gerber, respectivamente. (5.21) también es válida para Soderberg sustituyendo S_{ut} por S_{yt} . Tal y como se ha dicho, introduciendo el valor de S_f en el diagrama de fatiga del material, se obtendría la duración estimada del elemento.

Si se plantea el obtener un diagrama representativo de la duración en función de la tensión alternante, para un valor dado de la tensión media, el procedimiento sería dibujar el diagrama de Goodman (o el correspondiente al criterio que se utilice) para cada duración, tomando de cada uno el valor de la resistencia alternante para el valor dado de σ_m y representando todos esos puntos en un diagrama $S - N$. La aplicación analítica de este problema, por el criterio de Goodman, se muestra a continuación.

La resistencia alternante para una duración de N ciclos y tensión media σ_m viene dada por (5.23).

$$\frac{S_f(N, \sigma_m)}{S_f(N, 0)} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} = 1 \quad (5.23)$$

Del diagrama de fatiga con tensión media nula, para el intervalo de ciclo alto se tiene (5.24).

$$\frac{\log S_f(N, 0) - \log S_e}{6 - \log N} = \frac{\log 0,9 S_{ut} - \log S_e}{6 - 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log S_f(N, 0) = \frac{6 - \log N}{3} \cdot \log \frac{0,9S_{ut}}{S_e} + \log S_e \quad (5.24)$$

Sustituyendo en la ecuación (5.21):

$$\log S_f(N, \sigma_m) = \frac{6 - \log N}{3} \log \frac{0,9S_{ut}}{S_e} + \log S_e - \log \frac{S_{ut}}{S_{ut} - \sigma_m} \quad (5.25)$$

El valor para 1000 ciclos de duración será el indicado en (5.26).

$$\log S_f(10^3, \sigma_m) = \log(0,9S_{ut} - \sigma_m) \quad (5.26)$$

y la resistencia para vida infinita vendrá dada por (5.27).

$$\log S_f(10^6, \sigma_m) = \log \frac{S_{ut} - \sigma_m}{S_{ut}} \cdot S_e \quad (5.27)$$

que, lógicamente, coincide con la expresión que proporcionaría el criterio de Goodman para esa duración.

Procediéndose de manera análoga con el diagrama de fatiga de ciclo bajo, se obtiene la expresión (5.28)

$$\begin{aligned} \frac{\log S_f(N, 0) - \log 0,9S_{ut}}{3 - \log N} &= \frac{\log S_{ut} - \log 0,9S_{ut}}{3 - 0} \Rightarrow \log S_f(N, 0) = \\ &= \frac{3 - \log N}{3} \log \frac{1}{0,9} + \log 0,9S_{ut} \end{aligned} \quad (5.28)$$

que sustituida, de nuevo, en (5.21) ofrece:

$$\log S_f(N, \sigma_m) = \frac{3 - \log N}{3} \log \frac{1}{0,9} + \log 0,9S_{ut} - \log \frac{S_{ut}}{S_{ut} - \sigma_m} \quad (5.29)$$

Así, el valor para 1000 ciclos de duración será el indicado en (5.30).

$$\log S_f(10^3, \sigma_m) = \log 0,9(S_{ut} - \sigma_m) \quad (5.30)$$

mientras que para un ciclo:

$$\log S_f(1, \sigma_m) = \log(S_{ut} - \sigma_m) \quad (5.31)$$

En resumen, para trazar el diagrama de fatiga con tensión media σ_m , atendiendo al criterio de Goodman, bastará con trazar un diagrama idéntico al correspondiente a tensión media nula, pero que pase por los puntos $S_{ut} - \sigma_m$ para 1 ciclo, $0,9(S_{ut} - \sigma_m)$ para 10^3 ciclos, y $\frac{S_{ut} - \sigma_m}{S_{ut}} \cdot S_e$ para vida infinita. A partir de aquí se obtendrán las duraciones en función de las tensiones alternantes y viceversa.

En la figura 120 se muestra el diagrama de fatiga $S - N$ según Goodman para el caso de la probeta de ensayo de viga rotatoria, caso de una pieza sometida a tensiones alternantes (tensión media nula), y el caso de la misma pieza sometida a tensiones fluctuantes (tensión media no nula).

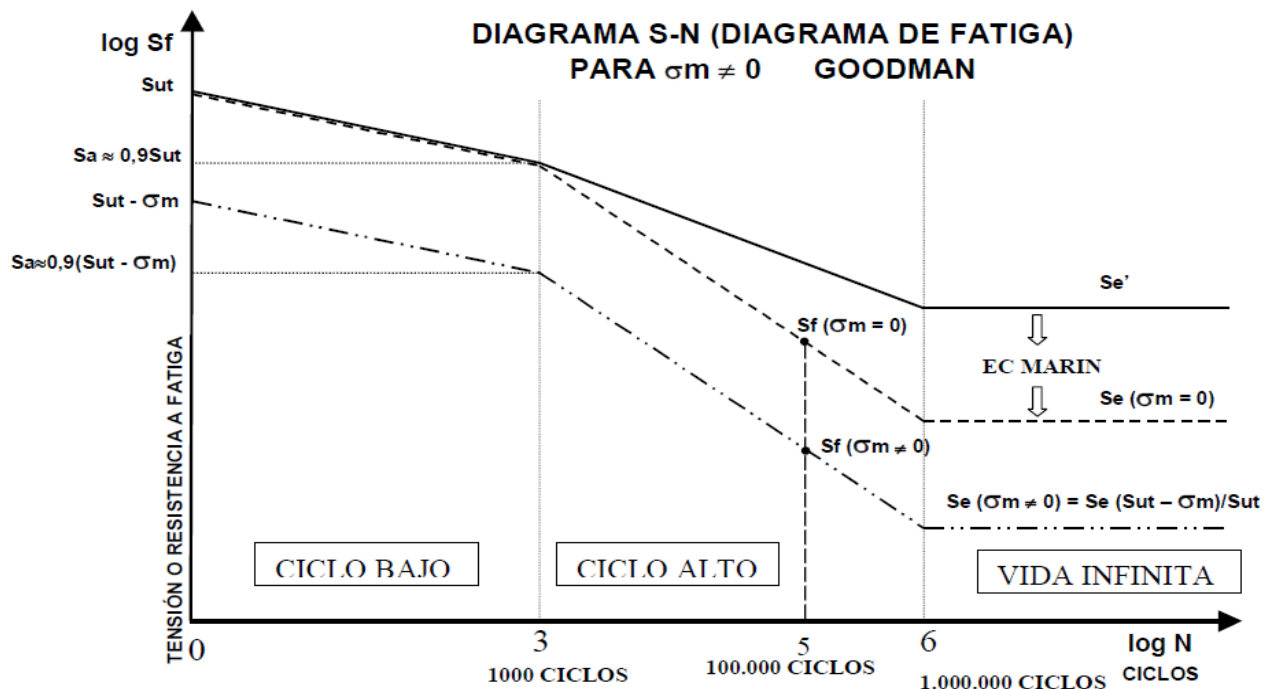


Figura 120. Diagrama de fatiga S-N según Goodman.

5.3.7 Línea de carga.

En la mayor parte de los sistemas mecánicos, las propias características de funcionamiento hacen que las variaciones de la tensión alternante solo puedan presentarse acompañadas de variaciones de la tensión media. Por ejemplo, en el caso de un engranaje, en la zona de engrane, la base del diente está sometido a una carga exterior que lo flexiona, mientras en la zona de no engrane el diente está libre de esfuerzos. Esto significa que el diente se encuentra sometido a un esfuerzo de flexión que fluctuará entre un valor determinado y cero y, por tanto, las tensiones medias y alternantes serán iguales a la mitad de dicho valor. Si existiera una sobrecarga, se produciría un aumento de la tensión alternante, pero también

de la tensión media y, en este caso, manteniéndose ambas iguales, de forma que no es posible un aumento de la tensión alternante sin un aumento igual de la media.

Si esto es así, un factor definido como la relación entre la resistencia a fatiga para una duración determinada, con tensión media igual a la de diseño, sería bastante poco significativo pues indicaría la lejanía de un estado límite de fallo, pero que en la realidad no se puede dar. Interesa, más bien, ver la proximidad o lejanía del estado de fallo que realmente se puede presentar.

Así, se llama **línea de carga** a la representación en un diagrama $\sigma_m - \sigma_a$ de los posibles estados tensionales del sistema que se analiza, cuando la carga externa experimenta variaciones de acuerdo con la naturaleza del sistema. La figura 121 representa esta línea de carga en el diagrama de Goodman para vida infinita.

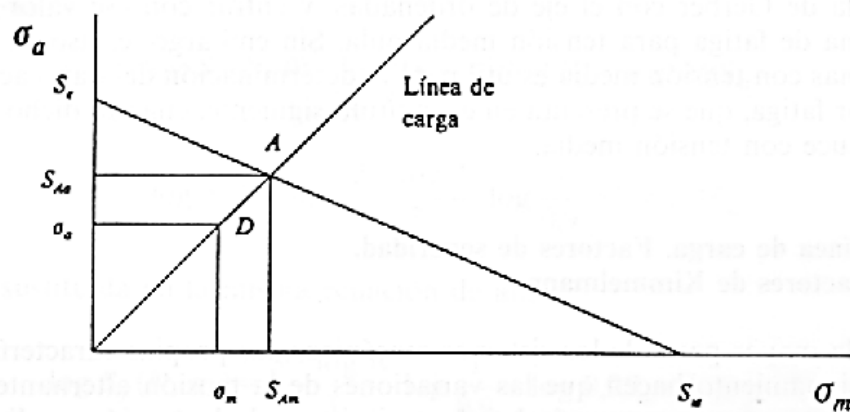


Figura 121. Línea de carga en el diagrama de Goodman para vida infinita.

La situación en la que se produce el fallo, caso que se desee vida infinita, sería la representada por el punto A. Es claro que el coeficiente de seguridad debe estar referido a dicho punto. Se debe hacer la consideración de dos concepciones distintas del factor de seguridad.

Si el factor de seguridad se considera como factor de aplicación de la carga, se trataría de buscar el número por el que se ha de multiplicar la carga y, por tanto, las tensiones a las que afecta hasta que las tensiones media y alternante fuesen las correspondientes al punto límite A. Como A verifica la ecuación de Goodman, se obtendrá lo indicado en la expresión (5.32):

$$\frac{S_{Aa}}{S_f} + \frac{S_{Am}}{S_{ut}} = 1 \quad (5.32)$$

Si la carga externa se multiplica por un factor n para llegar a la situación límite, las tensiones medias y alternantes de diseño (punto D), también se multiplican por dicho factor, tal y como se muestra en (5.33) y (5.34).

$$S_{Aa} = n \cdot \sigma_a \quad (5.33)$$

$$S_{Am} = n \cdot \sigma_m \quad (5.34)$$

Así, el coeficiente de seguridad vendrá dado por (5.35).

$$n = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}}} \quad (5.35)$$

Otro caso es aquel en el que las tensiones alternantes o medias se mantienen constantes, mientras que las medias y alternantes, respectivamente, varían. Esto corresponde a las líneas horizontales y verticales que pasan por el punto A.

5.4 Resistencia mecánica de ejes. [35]

5.4.1 Introducción.

Se define por **eje de transmisión** a un elemento cilíndrico de sección circular que transmite un movimiento de giro y que puede llevar montado distintos elementos mecánicos de transmisión de potencia (engranajes, poleas, volantes, las ruedas de un vehículo etc.). Estos elementos deben situarse, siempre que sea posible, cerca de los cojinetes de soporte.

Los ejes están sometidos a cargas de flexión, tracción, compresión o torsión que actúan de forma combinada o individualmente. En los siguientes apartados se van a analizar y aplicar las teorías expuestas en los puntos anteriores, refiriéndolas al caso exclusivo de cálculo de ejes.

5.4.2 Cálculo de un eje para resistencia estática.

Las tensiones en la superficie de un eje macizo de sección circular, en un estado de carga combinada de flexión y torsión vienen dadas por las expresiones (5.36) y (5.37):

$$\sigma_x = \frac{M \cdot \frac{d}{2}}{I} = \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot d^3} \quad (5.36)$$

$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot \frac{d}{2}}{J} = \frac{16 \cdot T}{\pi \cdot d^3} \quad (5.37)$$

donde:

- σ_x es la tensión de flexión (esfuerzo normal según la dirección X).
- τ_{xy} es la tensión de torsión (esfuerzo tangencial en el plano XY).
- M es el momento flector en la sección crítica.
- $I = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$ es el momento de inercia transversal del eje.
- T es el momento torsor en la sección crítica.
- $J = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$ es el momento polar de inercia del eje.
- d es el diámetro del eje.

Mediante la aplicación del círculo de Mohr puede obtenerse la tensión cortante máxima, cuyo valor se indica en (5.38).

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5.38)$$

con lo que, sustituyendo los valores de las ecuaciones (5.36) y (5.37), se obtiene (5.39).

$$\tau_{max} = \frac{16}{\pi \cdot d^3} \cdot \sqrt{M^2 + T^2} \quad (5.39)$$

Si se aplicasen las teorías de esfuerzo cortante máximo y de Von Mises para el caso de cortadura pura, despejando el diámetro, se llega (siendo n el coeficiente de seguridad) a las ecuaciones (5.40) y (5.41), respectivamente.

- Teoría del esfuerzo cortante máximo (E.C.M.)

$$d = \left[\frac{32 \cdot n}{\pi \cdot S_y} \cdot \sqrt{M^2 + T^2} \right]^{1/3} \quad (5.40)$$

- Teoría de Von Mises (V.M.)

$$d = \left[\frac{27.7 \cdot n}{\pi \cdot S_y} \cdot \sqrt{M^2 + T^2} \right]^{1/3} \quad (5.41)$$

De esta forma, con los datos de los esfuerzos de los que se disponga, se puede obtener el diámetro mínimo para poder soportar los esfuerzos requeridos.

5.4.3 Cálculo de un eje para resistencia a cargas alternantes (fatiga).

Todo eje en rotación en un estado tensional en el que existan momentos flectores y torsores, origina la aparición de una tensión de flexión alternante y una tensión torsional que permanece constante. Los valores de estas tensiones coincidirán con las expresiones (5.36) y (5.37) obtenidas en el apartado anterior, de forma que si definimos con el subíndice 'a' a la tensión alternante y con 'm' el medio, se tienen las igualdades (5.42) y (5.43):

$$\sigma_a = \frac{M \cdot \frac{d}{2}}{I} = \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot d^3} \quad (5.42)$$

$$\tau_m = \frac{T \cdot \frac{d}{2}}{J} = \frac{16 \cdot T}{\pi \cdot d^3} \quad (5.43)$$

A continuación se analizan las distintas teorías existentes de aplicación al cálculo de ejes.

5.4.3.1 Teoría básica o de Sines.

La teoría básica de Sines se centra en los resultados de experimentos que indican que la resistencia a la fatiga por flexión no varía por la existencia de un esfuerzo medio a torsión hasta el momento en el que éste alcanza el valor de $1.5 \cdot S_{Sy}$ (siendo S_{Sy} la resistencia a fluencia en cortadura). Así, entrando en la ecuación inicialmente planteada según la teoría E.C.M., el diámetro de cálculo en unas condiciones dadas será el indicado 3n (5.44).

$$d = \left[\frac{32 \cdot n}{\pi \cdot S_e} \cdot M \right]^{1/3} \quad (5.44)$$

Cuando se utilice esta teoría es necesario comprobar que el eje con el diámetro obtenido no sufrirá fluencia. Además, el límite de fatiga es el corregido por los coeficientes de Marin.

5.4.3.2 Teoría de Soderberg.

Aunque ya se ha analizado la teoría de Soderberg, a continuación se estudia su aplicación al caso de ejes.

Partiendo de un elemento de esfuerzo de espesor unitario en la superficie de un eje macizo de sección circular girando a una velocidad de ω rad/s., se supondrá que se corta éste por un plano PQ que pasa por la esquina inferior derecha del mismo (ver figura 122). Bajo este plano tendremos, a su vez, otro elemento en forma de cuña. Se analizarán todos los posibles valores de las tensiones en función de la variación del ángulo α con el fin de determinar en qué plano ocurre la falla.

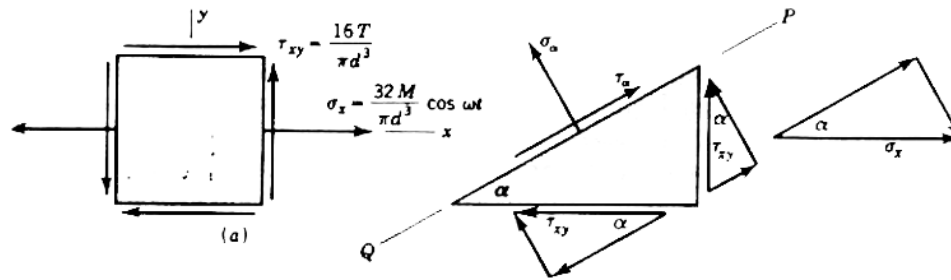


Figura 122. Corte mediante plano PQ de un elemento de esfuerzo de espesor unitario.

Para ello, se utilizará la teoría de esfuerzo cortante máximo por lo que se debe encontrar la expresión que define τ_a . Si se establece la ecuación de equilibrio de fuerzas, se obtiene (5.45).

$$\begin{aligned} \tau_a + \sigma_x \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \alpha + \tau_{xy} \text{sen}^2 \alpha - \tau_{xy} \text{cos}^2 \alpha &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \tau_a &= \frac{16 \cdot T}{\pi \cdot d^3} \cdot \text{cos} 2\alpha - \frac{16 \cdot M}{\pi \cdot d^3} \cdot \text{sen} 2\alpha \cdot \text{cos} \omega t \end{aligned} \quad (5.45)$$

De esta forma se definen un τ_a medio y un τ_a alternante. Si se representa en una gráfica la variación de estas dos componentes en función de α , se obtiene una curva de los diferentes estados tensionales (ver figura 123).

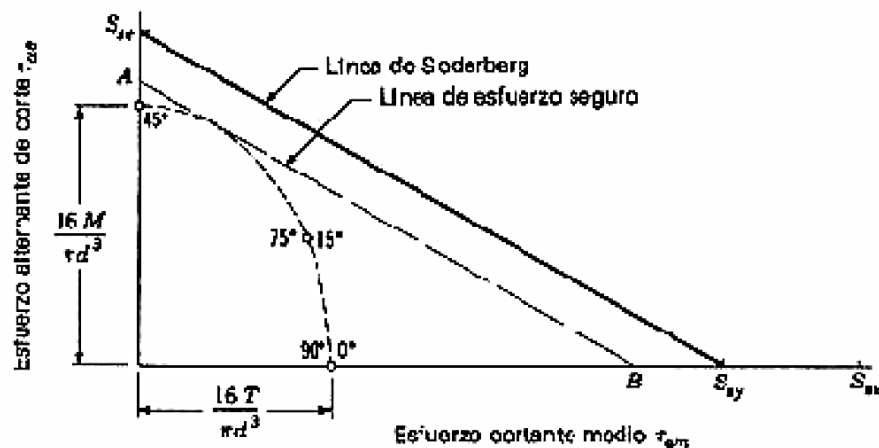


Figura 123. Esfuerzo cortante medio frente a esfuerzo cortante alternante.

Se comprueba que el estado de máxima tensión será aquel punto de la elipse por el que pasa una recta paralela a la línea de Soderberg y cuya distancia a la misma sea mínima. Así, geométricamente, se obtiene que el coeficiente de seguridad n vendrá dado por (5.46).

$$n = \frac{\pi \cdot d^3}{16 \cdot \sqrt{\left(\frac{T}{S_{sy}}\right)^2 + \left(\frac{M}{S_{se}}\right)^2}} \quad (5.46)$$

Despejando el diámetro de (5.46) se tiene (5.47).

$$d = \left[\frac{16 \cdot n}{\pi} \left(\left(\frac{T}{S_{sy}} \right)^2 + \left(\frac{M}{S_{se}} \right)^2 \right)^{1/2} \right]^{1/3} \quad (5.47)$$

Si a (5.47) se le aplican las dos teorías de resistencia estática mencionadas anteriormente para obtener la expresión en función de S_y y S_e , se llega a las ecuaciones (5.48) y (5.49), respectivamente.

- Teoría del esfuerzo cortante máximo (E.C.M.)

$$S_{sy} = 0,5 \cdot S_y \quad S_{sy} = 0,5 \cdot S_e$$

$$d = \left[\frac{32 \cdot n}{\pi} \left(\left(\frac{T}{S_y} \right)^2 + \left(\frac{M}{S_e} \right)^2 \right)^{1/2} \right]^{1/3} \quad (5.48)$$

- Teoría de Von Mises (V.M.)

$$S_{sy} = 0,577 \cdot S_y \quad S_{sy} = 0,577 \cdot S_e$$

$$d = \left[\frac{27,7 \cdot n}{\pi} \left(\left(\frac{T}{S_y} \right)^2 + \left(\frac{M}{S_e} \right)^2 \right)^{1/2} \right]^{1/3} \quad (5.49)$$

Estas expresiones ofrecen el valor del diámetro en función de valores que son conocidos o que deben ser estimados.

Para el caso más general, en el que el eje está sometido a la combinación de esfuerzos de flexión (M_a) y torsión (T_a) variables y, al mismo tiempo, a esfuerzos de flexión (M_m) y torsión (T_m) constante, la forma de aplicar las ecuaciones (5.48) y (5.49) se indica en (5.50) y (5.51).

$$\frac{T}{S_y} \equiv \frac{T_a}{S_e} + \frac{T_m}{S_y} \quad (5.50)$$

$$\frac{M}{S_e} \equiv \frac{M_a}{S_e} + \frac{M_m}{S_y} \quad (5.51)$$

5.4.3.3 Teoría de Goodman.

El planteamiento a desarrollar en este caso es análogo al aplicado en la teoría de Soderberg, pero utilizando la teoría de Goodman.

Así se obtienen, de forma geométrica, las expresiones dadas en (5.52):

$$n = \frac{\pi \cdot d^3}{16 \cdot \sqrt{\left(\frac{T}{S_{su}}\right)^2 + \left(\frac{M}{S_{se}}\right)^2}} \Rightarrow d = \left[\frac{16 \cdot n}{\pi} \left(\left(\frac{T}{S_{su}}\right)^2 + \left(\frac{M}{S_{se}}\right)^2 \right)^{1/2} \right]^{1/3} \quad (5.52)$$

Si a (5.52) se le aplican las dos teorías de resistencia estática para obtener la expresión en función de S_y y S_e , se llega a las ecuaciones (5.53) y (5.54), respectivamente.

- Teoría del esfuerzo cortante máximo (E.C.M.)

$$S_{sy} = 0,5 \cdot S_y \quad S_{sy} = 0,5 \cdot S_e$$

$$d = \left[\frac{32 \cdot n}{\pi} \left(\left(\frac{T}{S_u}\right)^2 + \left(\frac{M}{S_e}\right)^2 \right)^{1/2} \right]^{1/3} \quad (5.53)$$

- Teoría de Von Mises (V.M.)

$$S_{sy} = 0,577 \cdot S_y \quad S_{sy} = 0,577 \cdot S_e$$

$$d = \left[\frac{27,7 \cdot n}{\pi} \left(\left(\frac{T}{S_u}\right)^2 + \left(\frac{M}{S_e}\right)^2 \right)^{1/2} \right]^{1/3} \quad (5.54)$$

Al igual que con la teoría de Soderberg, (5.53) y (5.54) ofrecen el valor del diámetro en función de valores que son conocidos o que deben ser estimados y, de forma análoga a dicha teoría, para el caso más general de esfuerzos de flexión (M_a) y torsión (T_a) variables y, al

mismo tiempo, a esfuerzos de flexión (M_m) y torsión (T_m) constante, la forma de aplicar las viene dada por (5.55) y (5.56).

$$\frac{T}{S_u} \equiv \frac{T_a}{S_e} + \frac{T_m}{S_u} \quad (5.55)$$

$$\frac{M}{S_e} \equiv \frac{M_a}{S_e} + \frac{M_m}{S_u} \quad (5.56)$$

5.4.3.4 Resumen de teorías principales para el cálculo de ejes a fatiga.

En la tabla 4 se resumen las ecuaciones de las teorías de Goodman y Soderberg (las principales y más utilizadas) para el cálculo de ejes a fatiga.

Tabla 4. Resumen de las ecuaciones de las teorías de Goodman y Soderberg para ejes a fatiga.

	TEORÍA DE SODERBERG	TEORÍA DE GOODMAN
EXPRESION GENERAL	$d = \left[\frac{16 \cdot n}{\pi} \left(\left(\frac{T}{S_{sy}} \right)^2 + \left(\frac{M}{S_{se}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}$	$d = \left[\frac{16 \cdot n}{\pi} \left(\left(\frac{T}{S_{su}} \right)^2 + \left(\frac{M}{S_{se}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}$
T.C.M. ($S_{sy} = 0,5 S_y$) ($S_{se} = 0,5 S_e$)	$d = \left[\frac{32 \cdot n}{\pi} \left(\left(\frac{T}{S_y} \right)^2 + \left(\frac{M}{S_e} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}$	$d = \left[\frac{32 \cdot n}{\pi} \left(\left(\frac{T}{S_u} \right)^2 + \left(\frac{M}{S_e} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}$
T.V.M. ($S_{sy} = 0,577 S_y$) ($S_{se} = 0,577 S_e$)	$d = \left[\frac{27.7 \cdot n}{\pi} \left(\left(\frac{T}{S_y} \right)^2 + \left(\frac{M}{S_e} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}$	$d = \left[\frac{27.7 \cdot n}{\pi} \left(\left(\frac{T}{S_u} \right)^2 + \left(\frac{M}{S_e} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}$

5.5 Comportamiento del método de los elementos finitos ante la presencia de fisuras.

[36]

5.5.1 Planteamiento del problema elástico plano.

Cuando se está ante la presencia de un problema elástico sometido a unas determinadas cargas y condiciones de contorno, quince variables son desconocidas, es decir, existen quince incógnitas (correspondientes a seis tensiones, seis deformaciones y tres desplazamientos).

Por otra parte, se disponen de quince ecuaciones para la resolución del problema:

- Tres ecuaciones de cantidad de movimiento.
- Seis relaciones cinemáticas, una para componente de la deformación.
- Seis ecuaciones constitutivas.

De este modo, se tienen quince ecuaciones y quince incógnitas, con lo que el problema sería resoluble. Sin embargo, algunas de las ecuaciones mencionadas son diferenciales, lo que hace que sean necesarias condiciones iniciales y de contorno previamente impuestas.

Respecto de un problema cualquiera, al introducir una fisura (figura 124), las ecuaciones disponibles no varían, sino que son las condiciones de contorno las que se ven modificadas. Esta alteración de las condiciones de contorno consiste en tomar las superficies definidas por los labios de la fisura como libres, base de la Mecánica de la Fractura Lineal y Elástica (MFLE).

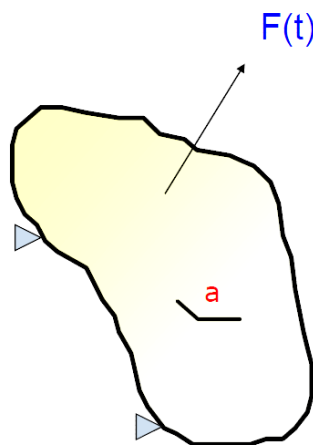


Figura 124. Continuo elástico genérico fisurado.

5.5.2 Modos de deformación de un sólido fisurado.

En la figura 125 se muestran los modos de deformación de un sólido fisurado:

- Modo I o modo de apertura.
- Modo II o modo de deslizamiento.
- Modo III o modo antiplánico.

En todos los casos se ve que existe un desplazamiento relativo entre las superficies de la fisura. Ésta es condición necesaria para la aplicación de la MFLE. Cuando este desplazamiento relativo no se produzca (cuando, por ejemplo, se apliquen las cargas en la dirección de la fisura) se puede considerar que el estado tensional sería prácticamente idéntico al que existiría ante la ausencia de la fisura, es decir, puede ignorarse la presencia de la misma.

Normalmente, en un sólido genérico, el modo de deformación sería una combinación de los tres ya mencionados. No obstante, en este proyecto se centrará la atención en el modo I, el más habitual en la gran mayoría de los componentes mecánicos.

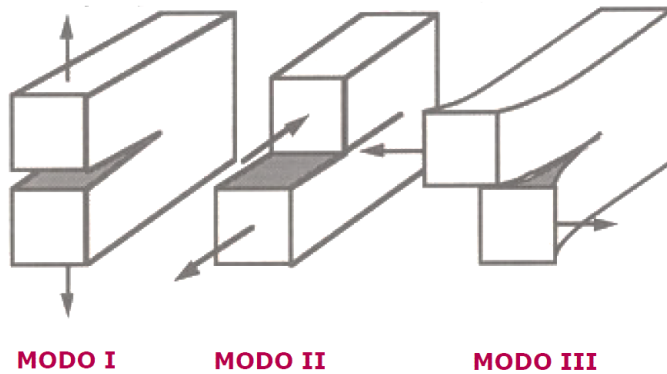


Figura 125. Modos de deformación de un sólido fisurado.

5.5.3 Hipótesis y solución del problema elástico-plano.

Las hipótesis que se toman en el planteamiento del problema elástico-plano en sólidos fisurados son:

- Material elástico lineal.
- Problema bidimensional (geométrico y de cargas).
- Carga estática.

Analizando la rebanada de un sólido tridimensional que presenta una fisura, el origen de coordenadas para la resolución del sistema se encontraría en el extremo de la misma (figura 126).

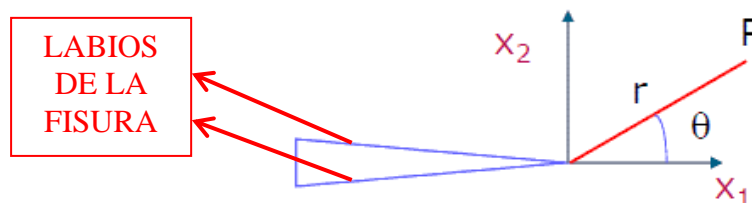


Figura 126. Sistema de coordenadas para la solución de un problema aplicando la MFLE.

Además del establecimiento del sistema de coordenadas, sería necesaria la definición de las fuerzas aplicadas (que se suponen conocidas) y de las condiciones de contorno de estimación de los bordes de fisura como superficies libres ($\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0$ en $\theta = \pm\pi$). Con ello, el problema quedaría planteado y preparado para la resolución.

La función de Airy queda definida como se indica en (5.57).

$$\phi = r^{\lambda+1} f(\theta) \quad (5.57)$$

donde λ es un parámetro que variará en función del número de términos de la solución (al ser un desarrollo, éstos son infinitos) que se tomen.

Para modo I de deformación, la solución viene dada por las ecuaciones (5.58) y (5.59).

$$\phi(r, \theta) = A_1 \cdot r^{3/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \chi r^2 + Y r^{5/2} + \dots \quad (5.58)$$

$$\sigma_{i,j} = A_1 \cdot r^{-1/2} f_{i,j}(\theta) + Z r^0 + \Psi r^{1/2} + \dots \quad (5.59)$$

donde χ, Y, Z, Ψ son valores desconocidos debido a que, como primera aproximación, únicamente se toma el primer término de la solución y $A_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}$, siendo K_I el denominado factor de intensidad de tensiones (FIT) en modo I.

De esta forma, se tiene la relación mostrada en (5.60).

$$\sigma_{i,j} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{i,j}(\theta) \quad (5.60)$$

Hay que tener en cuenta que esto sólo tendrá validez cuando el análisis se lleve a cabo en una zona cercana al borde de fisura ($r \rightarrow 0$).

5.5.4 Análisis de la solución del problema elástico-plano.

El inconveniente que presenta la solución del problema elástico-plano es que, en el extremo de fisura, la tensión sería infinita, es decir, la solución presenta una singularidad. Es éste el motivo de que no se pueda utilizar el criterio convencional de resistencia de materiales (estudio de las tensiones y comparación con límite elástico) para analizar fisuras.

Así, en el análisis de fisuras se utiliza como criterio de fallo el llamado criterio de fractura, mostrado en (5.61).

$$K_I = K_{IC} \quad (5.61)$$

donde:

- K_I es el factor de intensidad de tensiones antes mencionado, que representa la amplitud de la singularidad y depende de la geometría del sólido y de las cargas exteriores.

- K_{IC} es la tenacidad a fractura, un valor característico del material.

Aunque la solución sea singular para las tensiones, es interesante conocer si también lo es para deformaciones y desplazamientos.

La tensión y la deformación guardan una relación lineal con el módulo de elasticidad (E) y el módulo de Poisson (ν), luego las deformaciones mantendrán la misma singularidad que las tensiones.

En cuanto a los desplazamientos, se considerará, tomando como ejemplo ε_{22} , el desarrollo indicado en (5.62).

$$\varepsilon_{22} = \frac{\delta u_r}{\delta r} \Rightarrow u_r \sim \varepsilon_{22} \cdot r \Rightarrow u_r \sim A \cdot r^{-1/2} \cdot r = A \cdot r^{1/2} \quad (5.62)$$

donde A es una constante conocida.

Se observa que el valor del desplazamiento, al hacerse $r = 0$, es nulo, luego **no existe singularidad en los desplazamientos**.

5.5.5 Relación de la solución del problema elástico-plano con el MEF.

El método de los elementos finitos, al menos el módulo que se está utilizando en el presente proyecto, aplica las ecuaciones de la elasticidad. Esto conlleva que, al modelizarse una fisura, tanto las tensiones como las deformaciones obtenidas tras la simulación (debido a la singularidad que presentan) no deban ser consideradas como representativas de la realidad.

Sin embargo, aunque el método de los elementos finitos no aporte información fiable sobre las tensiones y desplazamientos, sí la aporta en cuanto a los desplazamientos se refiere, ya que en éstos no existe singularidad. Esta propiedad puede ser utilizada, como se verá, para intentar calcular el valor del FIT en modo I.

5.6 Aplicación de la Mecánica de la Fractura Lineal y Elástica (MFLE) mediante el MEF.

5.6.1 Introducción. [37]

La determinación de parámetros de mecánica de fractura mediante la utilización de métodos numéricos ha ocupado la atención de un importante número de investigadores, y existe actualmente un gran conjunto de técnicas que pueden ser empleadas para calcular los mismos.

El factor de intensidad de tensiones desempeña sin duda, un rol fundamental en el estudio de la mecánica de la fractura, y se ha realizado un gran esfuerzo en el desarrollo de métodos para su determinación. Por otro lado, existe un gran número de problemas de mecánica de fractura, en los cuales los efectos de la inercia no pueden ser despreciados. En los últimos años, el Método de los Elementos Finitos (MEF), ha aparecido como una alternativa eficiente para el estudio de problemas estáticos y dinámicos de mecánica de fractura, no solo en la determinación de la situación crítica de eminente propagación inestable sino también en la simulación del proceso de propagación.

En este trabajo se presenta el método de los elementos finitos (MEF), como una herramienta alternativa para el estudio de este tipo de fenómenos, se realiza el cálculo del factor de intensidad de tensiones en problemas estáticos y se intenta poner de manifiesto la capacidad del método para el cálculo de parámetros de mecánica de fractura.

Se recuerda que el MEF consiste esencialmente en la discretización espacial del continuo en módulos de reticulado espacial regulares, donde las rigideces de las barras son equivalentes a la del continuo que se quiere representar. La masa del modelo es discretizada concentrándola en los nodos del sistema discreto.

5.6.2 Método del balance de energía o extensión virtual de la fisura. [38]

En el método del balance de energía o extensión virtual de la fisura, se utiliza el MEF para determinar el valor de la energía específica de fractura G , realizando dos simulaciones con tamaños de fisuras levemente diferentes. De esta forma, es posible expresar el parámetro G como se indica en la ecuación (5.63).

$$G = -\frac{d\pi}{dA} = \frac{dW}{dA} - \frac{dU}{dA} - \frac{dK}{dA} \quad (5.63)$$

Donde π representa el potencial total, W el potencial de las fuerzas externas (la cual es evaluada multiplicando las fuerzas aplicadas por los desplazamientos en los nodos correspondientes, más el producto de las fuerzas de inercia en todos los nodos de la estructura multiplicados por el desplazamiento correspondiente), A es el área de la fisura, U es la energía de deformación elástica y K es la energía cinética.

Para resolver el problema numéricamente, para cada valor de tensión aplicada σ , se tendrá la expresión (5.64).

$$G(\sigma) = \frac{W_{(a+\Delta a)} - W_{(a)}}{\Delta a \cdot B} - \frac{U_{(a+\Delta a)} - U_{(a)}}{\Delta a \cdot B} - \frac{K_{(a+\Delta a)} - K_{(a)}}{\Delta a \cdot B} \quad (5.64)$$

Se verifica que, si las cargas son aplicadas lentamente, es posible despreciar la parte correspondiente a la energía cinética y, si son aplicadas tensiones prescritas en una zona alejada de la fisura (lo que se considerará que se está haciendo en la fisura del eje, debido a que se toma el estado tensional resultado de la aplicación de una carga estática), por el

teorema de Clapeyron, es posible demostrar que $dW/dA = 2 dU/dA$. Así, sustituyendo se obtiene la igualdad (5.69).

$$G = -\frac{d\pi}{dA} = \frac{dW}{dA} - \frac{dU}{dA} - \frac{dK}{dA} \Rightarrow G = \frac{dU}{dA} \quad (5.69)$$

De esta forma, se obtiene la expresión (5.70):

$$G(\sigma) = \frac{U_{(a+\Delta a)} - U_{(a)}}{\Delta a \cdot B} \quad (5.70)$$

Para el cálculo de $U(a + \Delta a)$ se aumentará la longitud de la fisura en un pequeño valor y se repite el análisis. Obtenido el valor de $G(\sigma)$ y considerando estado plano de deformaciones en la totalidad de la profundidad de la fisura, es posible calcular el factor de intensidad de tensiones K_I , tal y como se indica en (5.71).

$$K_I^2 = E^* \cdot G \quad (5.71)$$

donde E^* es el módulo de elasticidad generalizado que en deformación plana y toma el valor que se muestra en (5.72).

$$E^* = \frac{E}{1 - \nu^2} G \quad (5.72)$$

Capítulo 6

El método de los elementos finitos.

6.1 Introducción.

Las limitaciones de la mente humana son tales que no se puede captar el comportamiento del complejo mundo que la rodea en una sola operación global. Por ello, una forma natural de proceder de ingenieros, científicos e incluso de otro tipo de profesionales, como los economistas, consiste en separar los sistemas en sus componentes individuales o “elementos”, cuyo comportamiento pueda conocerse sin dificultad, y a continuación reconstruir el sistema original para estudiarlo a partir de dichos componentes. [10]

El método de los elementos finitos (MEF) ha adquirido una gran importancia en la solución de problemas ingenieriles, físicos, etc., ya que permite solucionar casos que hasta hace poco tiempo eran prácticamente imposibles de resolver por los métodos matemáticos tradicionales. Esta circunstancia obligaba a la creación de prototipos, a su ensayo y a ir realizando mejoras de forma iterativa, lo que conlleva un alto coste, tanto económico como temporal.

El MEF permite generar un modelo matemático de cálculo del sistema real, más fácil y económico de modificar que un prototipo. Sin embargo no deja de ser un método aproximado de cálculo, debido a las hipótesis básicas del método. Por ello, los prototipos, siguen siendo

necesarios, pero en menor número, ya que el modelo de elementos finitos puede ser muy cercano al diseño óptimo. [10]

En muchos casos se obtiene un modelo adecuado utilizando un número finito de componentes bien definidos. A tales problemas se les denominará **discretos**. En otros, la subdivisión prosigue indefinidamente y el problema sólo puede definirse haciendo uso de la ficción matemática del infinitésimo. Ello conduce a ecuaciones diferenciales o expresiones equivalentes con un número infinito de elementos implicados. A tales problemas se les denominará **continuos**.

Con la llegada de los computadores digitales, los problemas discretos pueden resolverse generalmente sin dificultad, aun cuando el número de elementos sea muy elevado. Como la capacidad de los computadores es finita, los problemas continuos sólo pueden resolverse de forma exacta mediante manipulaciones matemáticas. En este aspecto, las técnicas matemáticas disponibles suelen limitar las posibilidades a casos extremadamente simplificados. Para vencer la infranqueabilidad que supone la solución de problemas continuos reales, ingenieros y matemáticos han ido proponiendo a través de los años diversos métodos de discretización. Para éstos, se hace necesario efectuar alguna aproximación de tal naturaleza que quepa esperar que la misma se acerque, tan estrechamente como se quiera, a la solución continua verdadera a medida que crezca el número de variables discretas. [10]

El método de los elementos finitos es relativamente nuevo y, aunque su estructura básica es conocida desde hace bastante tiempo, en los últimos años ha sufrido un gran desarrollo debido a los avances informáticos y, precisamente estos avances, han puesto a disposición de los usuarios gran cantidad de programas que permiten realizar cálculos con elementos finitos. No obstante, hay que tener en cuenta que el manejo correcto de estas herramientas conlleva un profundo conocimiento no solo del material con el que se trabaja, sino también de los principios del MEF. Sólo en ese caso se estará en condiciones de garantizar que los resultados obtenidos en los análisis se ajustan a la realidad. [11]

6.2 Historia del método de los elementos finitos.

Aunque el nombre “MEF” se ha establecido recientemente, el concepto se ha usado desde hace varios siglos. El empleo de métodos de discretizado espacial y temporal y la aproximación numérica para encontrar soluciones a problemas ingenieriles o físicos es conocido desde antiguo. El concepto de elementos finitos parte de esa idea.

Para encontrar vestigios de este tipo de cálculos podría realizarse una abstracción a la época de la construcción de las pirámides egipcias. Los egipcios empleaban métodos de discretizado para determinar el volumen de las pirámides. Asimismo, Arquímedes (287-212 a.C.) empleaba el mismo método para calcular el volumen de todo tipo de sólidos o la superficie de áreas. En oriente también aparecen métodos de aproximación para realizar cálculos. Prueba de ello es que el matemático chino Lui Hui (300 d.C.) empleaba un polígono regular de 3072 lados para calcular longitudes de circunferencias con lo que conseguía una aproximación al número Pi de 3,1416.

El desarrollo de los elementos finitos tal y como se conocen hoy en día ha estado ligado al cálculo estructural fundamentalmente en el campo aeroespacial. En los años 40, Courant [12] propone la utilización de funciones polinómicas para la formulación de problemas elásticos en subregiones triangulares, como un método especial del método variacional de Rayleigh- Ritz para aproximar soluciones.

Fueron Turner, Clough, Martin y Topp [13] quienes presentaron el MEF en la forma aceptada hoy en día. En su trabajo introdujeron la aplicación de elementos finitos simples (barras y placas triangulares con cargas en su plano) al análisis de estructuras aeronáuticas, utilizando los conceptos de discretizado y funciones de forma.

El trabajo de revisión de Oden [14] presenta algunas de las contribuciones matemáticas importantes al MEF. Los libros de Przemieniecki [15] y de Zienkiewicz y Holister [16] presentan el MEF en su aplicación al análisis estructural. La obra de Zienkiewicz y Cheung [17] o Zienkiewicz y Taylor [18] presenta una interpretación amplia del MEF y su aplicación a cualquier problema de campos. En ella se demuestra que las ecuaciones de los elementos finitos pueden obtenerse utilizando un método de aproximación de pesos residuales, tal como el método de Galerkin o el de mínimos cuadrados. Esta visión del problema difundió un gran interés entre los matemáticos para la solución de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales mediante el MEF, que ha producido una gran cantidad de publicaciones hasta tal punto que hoy en día el MEF está considerado como una de las herramientas más potentes y probadas para la solución de problemas de ingeniería y ciencia aplicada.

Actualmente el método se encuentra en una fase de gran expansión: es ampliamente utilizado en la industria y continúan apareciendo cientos de trabajos de investigación en este campo. Los ordenadores han aportado el medio eficaz de resolver la multitud de ecuaciones que se plantean en el MEF, cuyo desarrollo práctico ha ido caminando parejo a las innovaciones obtenidas en el campo de la arquitectura de los ordenadores. Estas innovaciones, además de permitir la descentralización de los programas de elementos finitos, han contribuido a favorecer su uso a través de sofisticados paquetes gráficos que facilitan el modelado y la síntesis de resultados, tales como ANSYS (figura 127). Hoy en día ya se concibe la conexión inteligente entre las técnicas de análisis estructural, las técnicas de diseño (CAD), y las técnicas de fabricación. [11]



Figura 127. ANSYS, un programa de elementos finitos.

6.3 Fundamentos del análisis a través de elementos finitos.

La idea general del método de los elementos finitos es la división de un continuo en un conjunto de pequeños elementos interconectados por una serie de puntos llamados nodos. Las ecuaciones que rigen el comportamiento del continuo regirán también el del elemento. De esta forma se consigue pasar de un sistema continuo con infinitos grados de libertad que es regido por una ecuación diferencial o por un sistema de ecuaciones diferenciales a un sistema con un número de grados de libertad finito cuyo comportamiento se modela por un sistema de ecuaciones que pueden ser lineales o no.

En cualquier sistema a analizar puede distinguirse entre:

- Dominio, que es el espacio geométrico donde se va a analizar el sistema.
- Condiciones de contorno, que son las variables conocidas y que condicionan el cambio del sistema, tales como las cargas, los desplazamientos, las temperaturas, etc.
- Incógnitas, que son las variables del sistema que deseamos conocer tras la actuación de las condiciones de contorno sobre el sistema, tales como los desplazamientos, las tensiones, las temperaturas, etc.

El método de los elementos finitos supone que, para la solución del problema, se discretice el dominio en subdominios denominados **elementos**. El dominio se divide mediante puntos (en el caso lineal), mediante líneas (en el caso bidimensional) o mediante superficies (en el caso tridimensional) de manera que el dominio total de estudio resultante de la suma de dichos subdominios se aproxime al dominio real. Los elementos se definen a través de un número discreto de puntos llamados **nodos**, que conectan entre sí los distintos elementos. Sobre ellos se materializan las incógnitas fundamentales del problema. En el caso de los elementos estructurales, estas incógnitas son los desplazamientos nodales, ya que a partir de éstos se pueden obtener el resto de incógnitas de interés, como las tensiones o deformaciones. [11]

6.3.1 El modelo de elementos finitos.

Un modelo MEF es la idealización matemática de un sistema físico. Actualmente, la gran mayoría de los modelos de análisis por elementos finitos se construyen empleando un modelo sólido. Esta representación matemática tipo CAD de la estructura, define la geometría que debe dividirse en elementos a través de los nodos.

El modelo facilita en gran medida la aplicación de las condiciones de contorno del sistema y la realización de análisis. Sin embargo, el modelo sólido no participa en el proceso de solución del análisis, sino que toda esta información es transferida al modelo de elementos finitos. [19]

En la figura 128 pueden observarse las diferencias entre el modelo de elementos finitos y el modelo sólido.

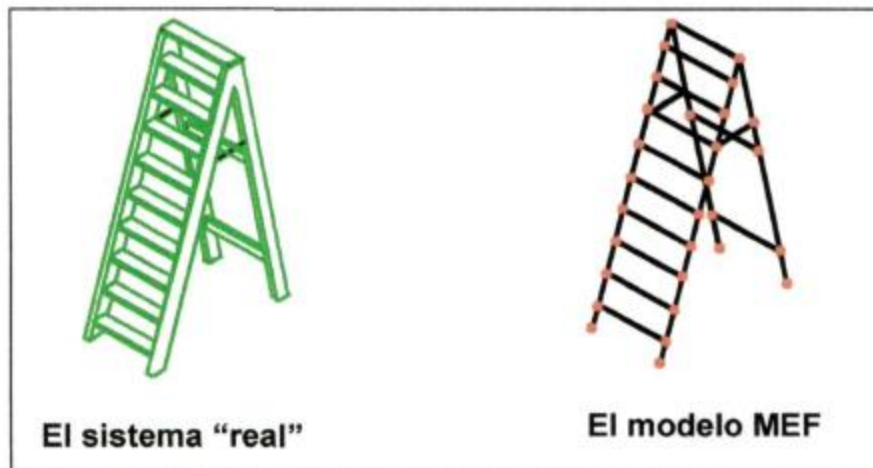


Figura 128. Ejemplo de modelo sólido y modelo de elementos finitos.

6.3.2 Los grados de libertad.

Como ya se ha mencionado, en el caso de elementos estructurales, las incógnitas fundamentales del problema son los desplazamientos nodales. A éstas, se les denomina grados de libertad de cada nodo del modelo. Así, los grados de libertad de un nodo son las variables que determinan el estado y/o posición de un nodo [11]

Por ejemplo, si se estudia una viga en voladizo con una carga puntual, tal y como se muestra en la figura 129, el discretizado del dominio sería el representado en la figura 130. [11]

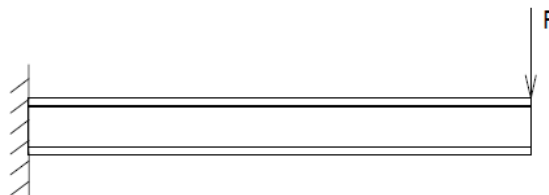


Figura 129. Viga en voladizo.

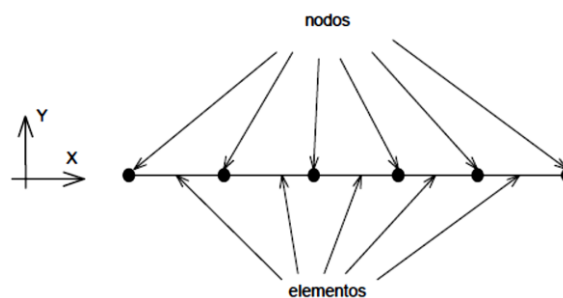


Figura 130. Discretizado de viga en voladizo.

De este modo, los grados de libertad de cada nodo serán:

- Desplazamiento en dirección x
- Desplazamiento en dirección y
- Giro según z

Esto ocurriría en el caso de que se seleccionase un elemento viga de tres grados de libertad por nodo (posteriormente, en el apartado 6.5, se explicarán los tipos de elementos). En un caso genérico cada nodo tendría, en análisis estructural, seis grados de libertad, tal y como se observa en la figura 131.

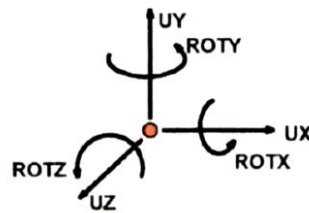


Figura 131. Grados de libertad estructurales.

6.4 Principios generales aplicados a un continuo elástico.

A continuación se muestran algunas de las ideas básicas relacionadas con los fundamentos matemáticos del MEF aplicadas al caso estructural.

6.4.1 Ecuaciones de equilibrio. Principio de los trabajos virtuales (PTV).

Una gran cantidad de problemas de medios continuos vienen expresados mediante ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno sobre la función o funciones incógnitas. Ante la dificultad, y en muchos casos la imposibilidad, de encontrar una solución cerrada, se opta por realizar una aproximación, siendo necesaria la expresión integral del Principio de los Trabajos Virtuales (PTV).

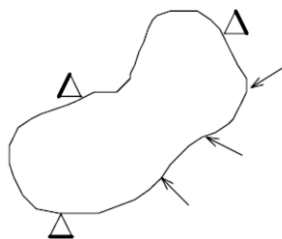


Figura 132. Continuo elástico genérico.

Se considera un continuo elástico como el de la figura 132 sometido a unas fuerzas superficiales $\{t\} = \{t_x, t_y, t_z\}^T$ y a unas fuerzas por unidad de volumen $\{X\} = \{X_x, X_y, X_z\}^T$ (las fuerzas por unidad de superficie podrían ser presiones y el peso propio sería una fuerza por unidad de volumen). El vector de desplazamientos queda denotado por $\{u\} = \{u, v, w\}^T$. Las deformaciones correspondientes a estos desplazamientos vienen dadas por la ecuación (6.1).

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T \quad (6.1)$$

y las tensiones debidas a estas deformaciones serán las mostradas en (6.2).

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T \quad (6.2)$$

Las ecuaciones de equilibrio para un elemento diferencial pueden escribirse de la forma indicada en (6.3).

$$\nabla\{\sigma\} + \{X\} = 0 \quad (6.3)$$

donde el vector $\{X\}$ incluye de forma general las fuerzas de inercia $\{X\} = \{X\} - \rho\ddot{u}$, es decir, las fuerzas de inercia son consideradas como fuerzas por unidad de volumen. Multiplicando esta ecuación por una función de ponderación $\{\delta u\}$ e integrando se obtiene la ecuación (6.4).

$$\int \{\delta u\}^T \nabla\{\sigma\} dv + \int \{\delta u\}^T X dv = 0 \quad (6.4)$$

utilizando la fórmula de Green¹ se puede escribir la expresión (6.5).

$$-\int_v \nabla\{\delta u\}^T \{\sigma\} dv + \int_s \{\delta u\}^T \{\sigma\} \bar{n} ds + \int_v \{\delta u\}^T X dv = 0 \quad (6.5)$$

Si se asocia la función de ponderación $\{\delta u\}$ con un desplazamiento virtual, el operador ∇ actuando sobre él será una deformación virtual tal y como la indicada en (6.6).

$$\{\delta \varepsilon\} = \nabla\{\delta u\} \quad (6.6)$$

El equilibrio en el contorno exige que se cumpla la relación $\{\sigma\} \cdot \{n\} = \{t\}$ y sustituyendo en la expresión (6.7).

¹La fórmula de Green se obtiene a partir de la relación $\nabla(ab) = a\nabla b + b\nabla a$ y del teorema de la divergencia ($\int_v \nabla a dv = \int_s a \bar{n} ds$), que nos permite escribir $\int_v a \nabla b = \int_s a b \bar{n} ds - \int_v b \nabla a dv$

$$-\int_v \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dv + \int_s \{\delta u\}^T \{t\} ds + \int_v \{\delta u\}^T X dv = 0 \quad (6.7)$$

En la relación anterior es posible introducir la ley de comportamiento de material mediante la matriz elástica con las propiedades de éste, $[C]$, de forma que se tiene (6.8).

$$\{\sigma\} = [C](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}_0) + \{\sigma\}_0 \quad (6.8)$$

siendo los vectores $\{\varepsilon\}_0^T$ y $\{\sigma\}_0^T$ las deformaciones y las tensiones iniciales respectivamente. Introduciendo la expresión (6.8) y suponiendo deformaciones y tensiones iniciales nulas, en la ecuación (6.7) se obtiene (6.9).

$$-\int_v \{\delta \varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dv + \int_s \{\delta u\}^T \{t\} ds + \int_v \{\delta u\}^T (\{X\} - \rho \ddot{u}) dv = 0 \quad (6.9)$$

que constituye la formulación del PTV y relaciona el sistema de cargas real y esfuerzos con el virtual de desplazamientos. [12]

6.4.2 Funciones de interpolación.

Discretizado el continuo, el objetivo es tomar un conjunto de funciones de interpolación que definan de manera única el campo de desplazamientos dentro del elemento en función de los desplazamientos en los nodos del mismo, lo que se representa en la ecuación (6.10).

$$\{u(x, y, z)\} = [N(x, y, z)]\{U\} \quad (6.10)$$

siendo $\{U\}$ el vector con los desplazamientos nodales. Una vez conocidos los desplazamientos en todos los nodos se determinan las deformaciones mediante (6.11).

$$\{\varepsilon\} = [D]\{u\} \quad (6.11)$$

donde $[D]$ es el operador diferencial que depende del problema de estudio. Sustituyendo el valor del desplazamiento resulta la expresión (6.12).

$$\{\varepsilon\} = [D][N]\{U\} = [B]\{U\} \quad (6.12)$$

de donde se obtiene el valor de las deformaciones en función de los desplazamientos nodales.

Sustituyendo la ecuación (6.12) en la expresión del PTV (6.9) se consigue (6.13).

$$-\int_v [B]^T [C][B]\{U\} dv + \int_s [N]^T \{t\} ds + \int_v [N]^T (\{X\} - \rho[N]\{\ddot{U}\}) dv = 0 \quad (6.13)$$

Reordenando (6.13) es posible llegar a un sistema de la forma mostrada en (6.14).

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{P\} \quad (6.14)$$

donde se definen

- Matriz de masa consistente:

$$[M] = \int_v [N]^T \rho [N] dv \quad (6.15)$$

- Matriz de rigidez:

$$[K] = \int_v [B]^T [C][B] dv \quad (6.16)$$

- Matriz de cargas nodales consistentes:

$$\{P\} = \int_v [N]^T \{X\} dv + \int_s [N]^T \{t\} ds \quad (6.17)$$

Las matrices anteriores son generales y permiten determinar las matrices elementales para cualquier tipo de discretización. [11]

6.4.3 Síntesis de las características globales.

Las anteriores matrices se calculan para cada uno de los elementos. Realizando una transformación de coordenadas a las denominadas coordenadas unitarias de cada elemento, las matrices quedan en función de parámetros puramente geométricos y se facilita la integración numérica. Antes de proceder al ensamblaje de todas las ecuaciones se debe realizar la transformación inversa a coordenadas globales con objeto de disponer de todas las matrices formuladas respecto al mismo sistema de coordenadas.

Una vez que se dispone de las matrices y vectores elementales en coordenadas globales su acoplamiento en el sistema puede realizarse según el llamado método directo, por el que se suma en cada posición nodal la contribución realizada por los distintos elementos. [11]

6.4.4 Imposición de condiciones de contorno. Solución.

Previamente a la obtención de la solución del sistema de ecuaciones planteado es necesario imponer los desplazamientos nodales que sean conocidos. El sistema resultante se puede dividir en dos términos: uno que contenga los desplazamientos impuestos y otro los incógnita. Resolviendo este sistema se obtendrán dichos desplazamientos incógnita, a partir de los cuales es posible calcular tensiones y deformaciones. [11]

6.5 Tipos de elementos finitos.

A continuación se describen algunas de las características más importantes de los elementos finitos más utilizados: elemento barra, elemento viga, elemento triangular, elemento cuadrilátero, elemento rectangular, elemento hexaédrico, elemento de bordes curvos y elemento axilsimétrico. Los programas comerciales de elementos finitos poseen una gran cantidad de elementos en sus librerías, sin embargo, la mayoría de las estructuras y aplicaciones mecánicas pueden ser solucionadas con los elementos básicos que a continuación se mencionarán.

Dependiendo de la dimensión, los elementos básicos se pueden dividir en tres categorías: elemento de línea, elemento de área y elementos de volumen. Los elementos barra y viga son elementos de línea, los elementos triangulares, cuadriláteros y axilsimétricos son elementos de área y los elementos hexaédricos y tetraédricos son elementos de volumen. [20]

6.5.1 Elemento barra.

El elemento barra está caracterizado básicamente porque sólo puede comportarse como un miembro sometido a dos fuerzas a lo largo del eje longitudinal del elemento. Una estructura se puede modelar con elementos barra si cumple las siguientes condiciones:

- a. Su longitud es mucho mayor que su ancho (entre 8 y 10 veces).
- b. Las distintas barras de la estructura están conectadas entre sí con pasadores que no transfieren momentos.
- c. Las cargas externas sólo son aplicadas en el extremo común de varios elementos y se reparten paralelamente a los mismos (como carga axial).

Así, los elementos barra solo pueden ser sometidos a tracción o compresión, con lo que sólo se debe especificar el área axial del elemento. La figura 133 muestra la geometría de un elemento barra tridimensional, que posee tres grados de libertad por nodo: los desplazamientos sobre los ejes globales X, Y y Z. [20]

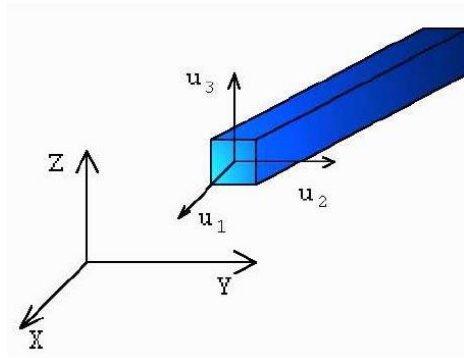


Figura 133. Elemento barra tridimensional.

6.5.2 Elemento viga.

El elemento viga es uno de los más usados. Además de sus aplicaciones obvias en estructuras, muchos otros sistemas, como uniones mecánicas, sistemas de conductos, tuberías y vigas en puentes, pueden ser modelados con este elemento.

Para que una determinada parte estructural sea modelada con elementos viga, una de sus dimensiones debe ser mucho mayor (por lo menos 10 veces) que las otras dos. Al contrario de lo que ocurría en el elemento barra, el elemento viga puede estar sometido a cargas transversales y/o momentos flectores además de a las cargas de tracción y compresión

La geometría y los grados de libertad de este tipo de elemento, considerándolo tridimensional, se muestran en la figura 134. Nótese que el elemento viga tridimensional posee seis grados de libertad por nodo: el desplazamiento y el giro en cada uno de los tres ejes. [20]

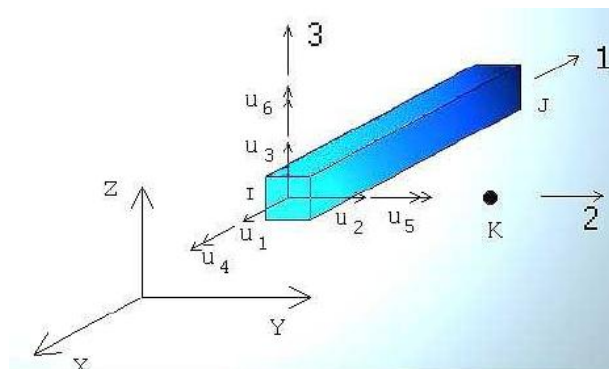


Figura 134. Elemento viga tridimensional.

6.5.3 Elementos planos triangular y cuadrilátero.

Para el caso del análisis plano existen principalmente dos tipos de elemento: el triangular y el cuadrilátero (ver figura 135). [20] El elemento triangular es el elemento finito por excelencia. Es un comodín, ya que con él se puede aproximar cualquier forma estructural

continua, plana o espacial, en forma de lámina o con bordes curvos, siempre que se disminuya de manera adecuada el tamaño de los mismos y, en consecuencia, se aumente su número en la discretización de la estructura continua. Aunque actualmente ya existen otros elementos más complejos que hacen frente a tales necesidades, el conocimiento de sus propiedades es fundamental para el estudio de elementos con caras curvas. [21]

El elemento cuadrilátero es de fácil manejo matemático por estar generado por la superposición de triángulos. [21] Como regla general, se prefieren los elementos cuadriláteros por razones de isotropía geométrica aunque, como ya se ha dicho, es interesante el uso de triángulos cuando se presentan irregularidades en la geometría del elemento a modelar, como se muestra en la figura 136. [20]

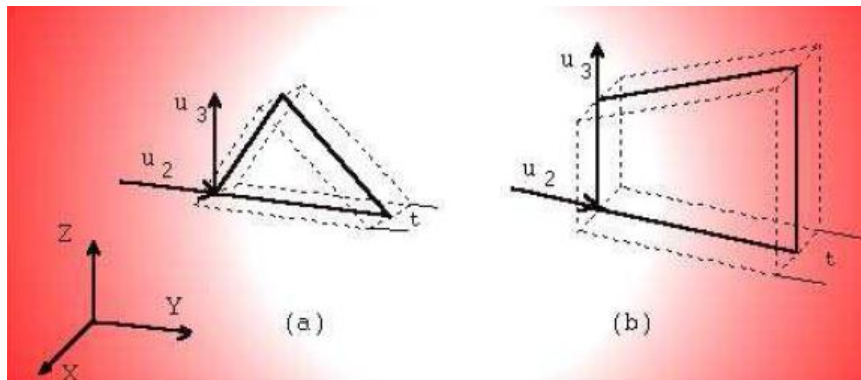


Figura 135. Elemento plano triangular (a) y cuadrilátero (b).

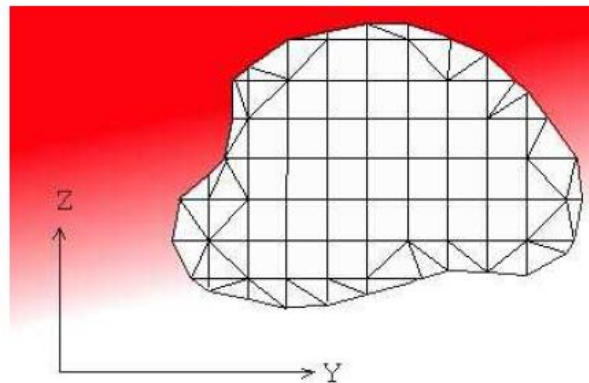


Figura 136. Combinación de elementos triangulares y cuadriláteros.

6.5.4 Elemento plano rectangular.

El elemento rectangular (figura 137) es muy útil por su facilidad computacional cuando sus lados son paralelos a los ejes de coordenadas globales y la estructura no tiene bordes curvos. Este elemento tiene gran importancia en el estudio de la flexión de placas delgadas y para el estudio de elementos hexaédricos con caras curvas.



Figura 137. Elemento plano rectangular.

Es de fácil generación y, en algunos casos, aproxima bien la forma del sólido en estudio. [21]

6.5.5 Elementos tetraédricos.

Este tipo de elementos, representado en la figura 138 es empleado en el análisis de problemas de elasticidad unidimensional, en particular para el estudio tensional de placas de gran espesor. Se trata de una generalización tridimensional del elemento triangular y, por este motivo, tienen en el espacio la adaptabilidad que tiene aquel en el plano. [21]

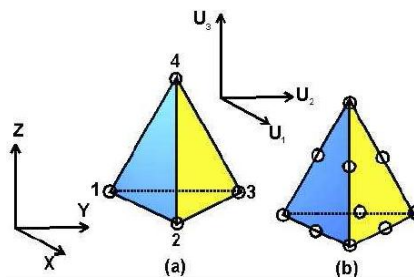


Figura 138. Tetraedro de cuatro (a) y de diez (b) nodos.

6.5.6 Elementos hexaédricos.

Los elementos hexaédricos (figura 139) se utilizan en el análisis de problemas de elasticidad tridimensional. Son empleados, principalmente, para el estudio de problemas de elasticidad espacial y de placas gruesas sometidas a cargas transversales. [21]

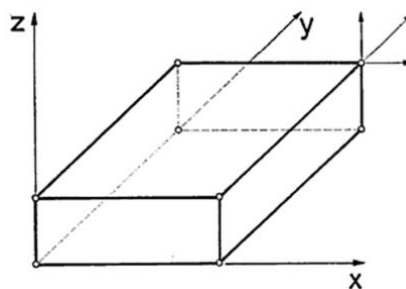


Figura 139. Elemento hexaédrico.

6.5.7 Elementos con bordes curvos.

Los elementos de bordes curvos o distorsionados son específicamente útiles para ser adaptados a estructuras continuas con perímetros no rectos. Para su estudio, son considerados como elementos transformados de otros elementos padre: lineal, triángulo, cuadrado y cubo. Pueden ser planos o espaciales (ver figura 140). [21]

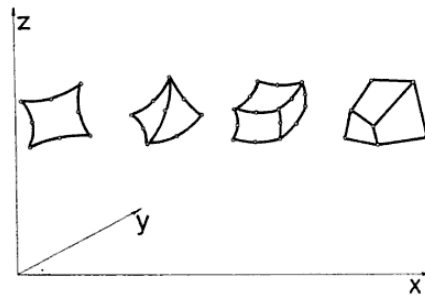


Figura 140. Elementos con bordes curvos.

6.5.8 Elementos axilsimétricos.

Tanques de acero y hormigón, rotores, toberas y contenedores son algunos ejemplos representativos de estructuras axilsimétricas. De forma similar a las estructuras tridimensionales que están bajo condición de esfuerzo plano o deformación plana, las estructuras axilsimétricas sometidas a cargas, también axilsimétricas, pueden ser analizadas en un modelo bidimensional. [20] Estos elementos tienen gran interés práctico para el estudio de estructuras resistentes con ejes de simetría (depósitos), estructuras de láminas delgadas, etc., por la posibilidad de simplificación de la formulación que presentan. [21]

Por ejemplo, para analizar una estructura axilsimétrica, como puede ser un cilindro de pared delgada t , aplicándosele una presión constante p , el modelo es la intersección del cilindro con el plano YZ , tal y como se muestra en la figura 141 [20]

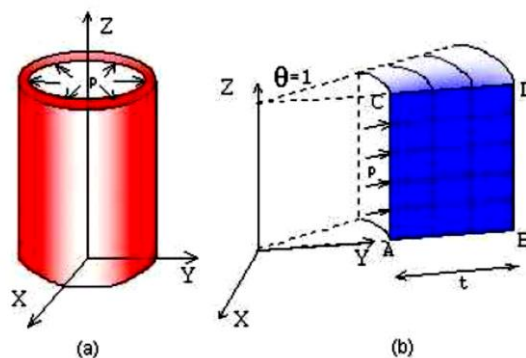


Figura 141. a) Cilindro bajo presión externa. b) Modelo axilsimétrico.

6.6 ANSYS, un programa de elementos finitos.

ANSYS Inc. (Swanson Analysis Systems, Inc.), fundada en 1970, desarrolla y presta soporte a la ingeniería introduciendo nuevos métodos para conseguir productos y procesos de fabricación más innovadores con programas de elementos finitos destinados a la simulación, que predicen cómo funcionará y reaccionará un determinado producto bajo un entorno real. [33]

ANSYS es un programa de elementos finitos que originariamente, siguiendo los principios teóricos indicados en este capítulo y que se pueden ampliar consultando el anexo A del presente proyecto, ofrece soluciones para resolver análisis estático-lineales. Sucesivamente se han ido introduciendo módulos con los que este programa es capaz de resolver problemas dinámicos no lineales, los cuales no han sido utilizados en el desarrollo del presente proyecto. [33]

El módulo mecánico de ANSYS (*ANSYS Structural Mechanics*) es un software de confianza de las organizaciones de todo el mundo para la resolución relativamente rápida y sencilla de problemas estructurales complejos. [44]

Con este módulo, ANSYS ofrece la posibilidad de simular todos los aspectos estructurales de un diseño: análisis estáticos lineales (que simplemente proporcionan las tensiones o deformaciones), análisis modal (que determina los modos propios de vibración) u otros estudios considerando fenómenos no lineales como transitorios, efectos dinámicos o diferentes comportamientos complejos. [44]

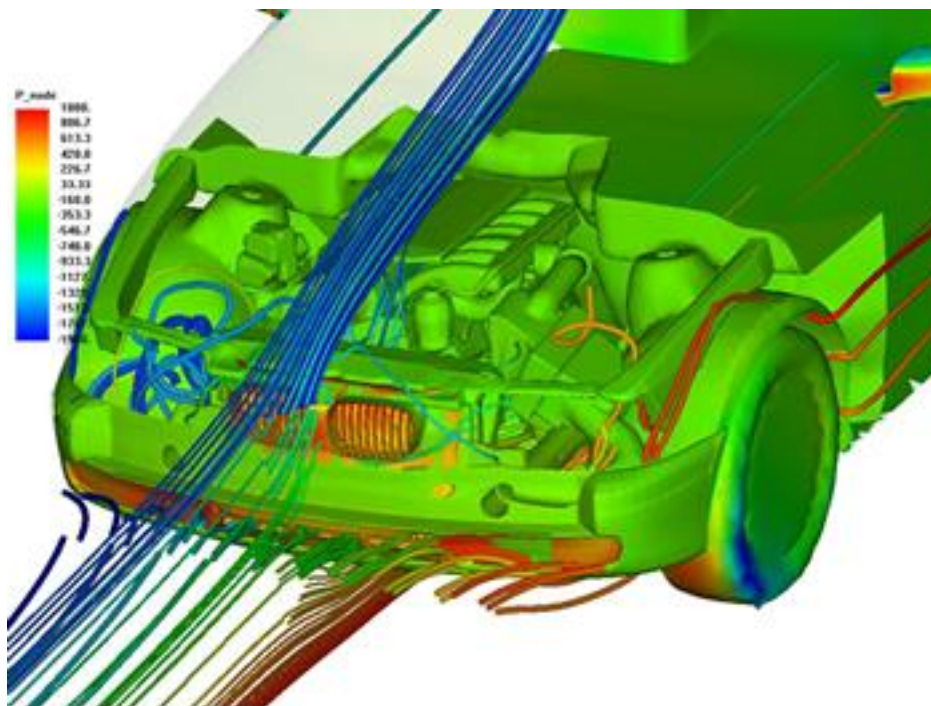


Figura 142. Análisis fluido mecánico mediante ANSYS CFD.

Sobre la base de haber sido durante muchos años (y siguen siéndolo) los líderes del mercado y los mejores en la tecnología de simulación estructural por elementos finitos, la relativa buena fidelidad de los resultados se logra a través de la amplia variedad de modelos de materiales disponibles, una amplia biblioteca de elementos, la robustez de los algoritmos de solución y la capacidad de modelar diferentes geometrías e interacciones entre ellas; desde piezas individuales a conjuntos muy complejos con cientos de componentes que interactúan a través de contactos o movimientos relativos. [44]

Por otro lado, se pueden combinar algoritmos para la mecánica estructural con otras funciones de ANSYS cuyas principales capacidades físicas se centran en la transferencia de calor, la dinámica de fluidos (ver figura 142) y el electromagnetismo, pudiéndose evaluar sistemas tan complejos como el ruido acústico, la interacción fluido-estructura, la fatiga térmica y las interferencias electromagnéticas. [44]

ANSYS Structural Mechanics, además, incorpora algoritmos paralelos para que el tiempo de cálculo se reduzca en modelos de gran tamaño. [44]

La integridad estructural es una de las consideraciones más críticas en el diseño del producto. En prácticamente todas las industrias, en el desarrollo de los productos y los equipos, se debe responder a cuestiones fundamentales tales como: ¿Cuánto tiempo durará este producto utilizándolo diariamente?, ¿cuáles son las fuerzas que pueden causar su fallo?, ¿sería posible disminuir el espesor del material utilizado para reducir los costes de las materias primas? [44]

Sea cual sea la industria o la aplicación, las empresas se enfrentan a enormes presiones para que los productos sean más resistentes, más duraderos y cumplan las características solicitadas por los clientes. Al mismo tiempo, esto hay que llevarlo a cabo con un gasto temporal y monetario que consiga minimizar el riesgo y el ciclo de desarrollo del producto, de manera que las innovaciones permitan que la empresa alcance una posición de liderazgo. [44]

¿Cómo puede un equipo de ingeniería cumplir estas demandas que, obviamente, se encuentran en conflicto? La respuesta está en aprovechar la potencia de simulación para diseñar y verificar los productos en un campo virtual libre de riesgo para el medio ambiente, minimizando (que nunca eliminando), así, la necesidad de prototipos físicos y pruebas. De este modo, la simulación en ingeniería ha revolucionado el cálculo estructural en los últimos cuatro decenios. [44]

ANSYS lleva décadas de experiencia en obtener la solución a los problemas de mecánica estructural. En la mayor parte de las industrias se aprovechan las soluciones que ofrece para resolver grandes y complejas simulaciones. [44]

En la industria aeroespacial, ANSYS se emplea para explorar la resistencia y la durabilidad de los materiales compuestos ligeros y de los materiales inteligentes que pueden mejorar la eficiencia energética de las aeronaves. Las capacidades avanzadas de análisis también se pueden aplicar a las estructuras de trenes de aterrizaje, ruedas y frenos y otros componentes críticos. Se investiga el impacto de aves y los diferentes escenarios de accidentes e incidentes, pudiéndose analizar cuestiones más complejas, tales como el rendimiento aerodinámico de la distribución de antenas integradas en el fuselaje. Con ello, se puede acelerar el desarrollo del proceso y reducir los costes de diseño al tiempo que se permite una mayor innovación, creatividad y calidad. [44]

En los bienes de consumo, se utiliza este software para estudiar el estrés y la fatiga de materiales, diseñar las pruebas de los productos y realizar estudios de ruido y otros análisis críticos a una amplia gama de aparatos, desde teléfonos móviles a lavadoras. Esto minimiza, por ejemplo, los costes de garantía del fabricante. [44]

En la industria del automóvil se aplica ANSYS a la verificación estructural de una amplia gama de vehículos: desde automóviles y camiones a equipos agrícolas, ferrocarriles de alta velocidad o máquinas de construcción. También se utiliza en I+D de motores de combustión interna (para incrementar la eficiencia del motor reduciendo la contaminación) y para optimizar los diseños mediante la mejora aerodinámica y la reducción de peso. [44]

Los equipos industriales (robots, tornos, máquinas fresadoras, etc.) juega un papel fundamental para la obtención de los productos de los que se hace uso en la vida moderna. La economía competitiva y de consumo dicta altas tasas de producción mientras que las empresas y los consumidores requieren productos de alta calidad con tolerancias estrechas. Las máquinas utilizadas en la fabricación para conseguir estos objetivos tienen altas cargas de inercia que requieren una consideración precisa de la dinámica y de las tensiones existentes. *ANSYS Structural Mechanics* facilita estas tareas. [44]

En la arquitectura y la construcción, los ingenieros civiles deben cumplir con las, cada vez más, exigentes medidas de seguridad expuestas en los reglamentos. ANSYS proporciona a los diseñadores la capacidad de evaluar una gran cantidad de variables en un entorno virtual en el que se simulen edificios, puentes, represas, túneles o estadios. [44]

El campo de la energía, encuentra, continuamente, nuevas formas de aprovechar las capacidades de simulación de ANSYS. Por ejemplo, el programa se utiliza para modelar y mejorar el suministro de carbón desde la minería hasta los sistemas de combustión y de generación de energía o para abordar el cumplimiento del reglamento nuclear, la extracción de petróleo y gas y la identificación óptima de materiales para álabes de aerogeneradores y turbinas (ver figura 143). Ingenieros de turbomaquinaria también recurren a ANSYS para encontrar soluciones al estudio de cuestiones esenciales tales como la fatiga, la acústica y el estrés térmico. [44]

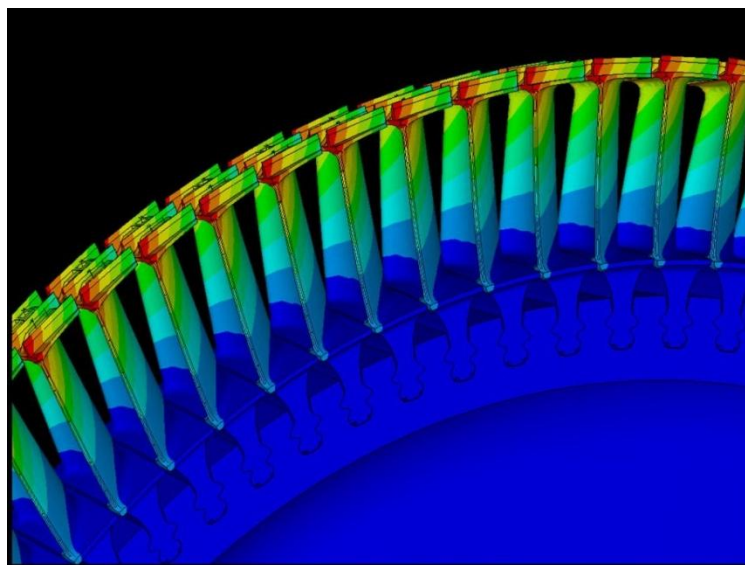


Figura 143. Análisis de álabes de turbinas mediante ANSYS.

Capítulo 7

Metodología.

7.1 Introducción. [45]

Metodología es un vocablo generado a partir de tres palabras de origen griego: *metà* (“más allá”), *odòs* (“camino”) y *logos* (“estudio”). El concepto hace referencia al plan de investigación que permite cumplir ciertos objetivos en el marco de una ciencia. Cabe resaltar que la metodología también puede ser aplicada en el ámbito artístico, cuando se lleva a cabo una observación rigurosa. Por lo tanto, puede entenderse a la metodología como el conjunto de procedimientos que determinan una investigación de tipo científico o marcan el rumbo de una exposición doctrinal.

En el ámbito de las ciencias sociales, el recurso de la metodología se enfoca en la realidad de una sociedad para arribar a una conclusión cierta y contundente acerca de un episodio valiéndose de la observación y el trabajo práctico típico de toda ciencia.

Es importante la distinción entre el método (nombre que recibe cada plan seleccionado para alcanzar un objetivo) y la metodología (rama que estudia el método). El metodólogo no se dedica a analizar ni a verificar conocimiento ya obtenido y aceptado por la ciencia: su tarea es rastrear y adoptar estrategias válidas para incrementar dicho conocimiento.

La metodología es una pieza esencial de toda investigación (método científico) que sigue a la propedéutica ya que permite sistematizar los procedimientos y técnicas que se requieren

para concretar un desafío. Cabe aclarar que la propedéutica da nombre a la acumulación de conocimientos y disciplinas que son necesarios para abordar y entender cualquier materia. El término proviene del griego *pró* (“antes”) y *paideutikós* (“referente a la enseñanza”).

En otras palabras, la metodología es un recurso concreto que deriva de una posición teórica y epistemológica para la selección de técnicas específicas de investigación. La metodología, entonces, depende de los postulados que el investigador crea que son válidos, ya que la acción metodológica será su herramienta para analizar la realidad estudiada. La metodología para ser eficiente debe ser disciplinada y sistemática y permitir un enfoque que permite analizar un problema en su totalidad.

Dentro de una investigación pueden desarrollarse muchas metodologías, pero todas ellas se encasillan en dos grandes grupos, la metodología de investigación cualitativa y cuantitativa. La primera es la que permite acceder a la información a través de la recolección de datos sobre variables, llegando a determinadas conclusiones al comparar estadísticas; la segunda, realiza registros narrativos sobre fenómenos investigados, dejando a un lado la cuantificación de datos y obteniéndolos a través de entrevistas o técnicas no-numéricas, estudiando la relación entre las variables que se obtuvieron a partir de la observación, teniendo en cuenta los contextos y las situaciones que giran en torno al problema estudiado.

Por otro lado, la metodología también puede ser comparativa (analiza), descriptiva (expone) o normativa (valora). Para saber si conviene utilizar un tipo de metodología u otro, el científico o investigador tiene que tener en cuenta un conjunto de aspectos importantes. Algunas de las preguntas que debe hacerse son: ¿qué resultados espera conseguir?, ¿quiénes son los interesados en conocer los resultados?, ¿cuál es la naturaleza del proyecto?

Es imprescindible que el método empleado y la teoría, que ofrece el marco donde se insertan los conocimientos, estén unidos por la coherencia (el cómo y el qué deben ser coherentes entre sí); esto significa que la metodología tiene que ser utilizada dentro de un marco ideológico, un sistema de ideas coherentes que sean las encargadas de explicar el para qué de la investigación.

Como ya se ha explicado, método y metodología son cosas diferentes. El término método, también conocido como técnicas de investigación, puede definirse como el camino para alcanzar un fin y la metodología consiste en los procedimientos que deben llevarse a cabo para cumplir con lo estipulado y obtener conclusiones verídicas sobre el fenómeno o problema que se analiza. En otras palabras, mientras que la metodología es lo que une al sujeto al objeto de conocimiento y es imprescindible para conseguir el conocimiento científico, el método es el camino o instrumento que nos lleva a él.

7.2 Planteamiento del problema y datos de partida.

Se dispone de los planos cedidos por RENFE del conjunto eje-raíl-rueda de un ferrocarril a partir de los cuales se intentará llevar a cabo un análisis, lo más exhaustivo y preciso posible, del comportamiento del eje ferroviario perteneciente a dicho conjunto. El resto de componentes (rueda y raíl) se considerará algo meramente testimonial, si bien permitirán la

generación de un modelo de simulación que reflejará lo más fielmente posible las condiciones de trabajo de dicho eje.

Para el desarrollo de todos los análisis que se lleven a cabo en este proyecto se aplicará el método de los elementos finitos (MEF) descrito en el capítulo anterior mediante el programa que lo aplica ANSYS 10, cuyas funcionalidades también han sido ya indicadas. Asimismo, se intentará comparar, cuando sea posible, los resultados obtenidos mediante simulación con los correspondientes que se hallarán mediante la aplicación de técnicas analíticas sobradamente asentadas y probadas.

Se dispone de los siguientes datos de partida:

- Medidas del conjunto eje-raíl-rueda a partir de los planos.
- Ángulo de inclinación del raíl: $5\% \approx 2,86^\circ$.
- Ancho de vía: 1688 mm.
- Material constituyente del conjunto y sus propiedades:
 - Acero F222 (también denominado 25CrMo4 o EA4T en el ámbito ferroviario).
 - Resistencia en estado bonificado (templado y revenido): 650-850 MPa.
 - Coeficiente de Poisson: 0,3.
 - Módulo de elasticidad: 210 GPa.
- Carga máxima soportada por el eje: 25t.
- Apriete IT01 100 μm en la zona de calaje entre el eje y la rueda.

Conociendo los datos anteriormente expuestos, se plantea la realización de los siguientes pasos en el desarrollo del proyecto, cuya metodología se especificará en los apartados subsecuentes:

- **Generación de un modelo de elementos finitos** del conjunto eje-raíl-rueda a partir de los planos de los que se dispone.
- **Realización de un análisis, mediante el modelo de elementos finitos, de las tensiones y desplazamientos** que se producen en el eje ferroviario cuando éste se encuentra estáticamente sometido a su carga máxima. Se comprobará que se cumplen las condiciones establecidas por la norma UNE-EN 13103:2010+A1.
- **Ejecución de un análisis modal mediante la aplicación del MEF** del eje ferroviario para la obtención de los modos propios de vibración del mismo.
- **Comprobación, de manera analítica y mediante la aplicación del MEF, de la vida a fatiga del eje ferroviario** en condiciones de carga máxima.
- **Empleo de la Mecánica de la Fractura Lineal y Elástica al estudio de un eje ferroviario fisurado mediante el MEF** (a través del método de la extensión virtual de la fisura) **y mediante cálculos analíticos.**
- **Aplicación del MEF al análisis adimensional de ejes ferroviarios** para la obtención de parámetros extrapolables a estudios en bancos de ensayos escalados.

7.3 Metodología para la generación del modelo de elementos finitos.

La geometría del conjunto eje-raíl-rueda que se quiere modelizar es altamente compleja. El asistente gráfico para la modelización del que dispone ANSYS 10 es lento y tedioso, por lo que los componentes del modelo se generarán en dos fases: se utilizará la aplicación SOLID EDGE para crear la forma física del conjunto y, posteriormente, mediante un archivo IGES, que define un formato neutral de datos facilitando el intercambio digital de información entre sistemas CAD, se exportará a ANSYS 10.

Por otro lado, puesto que el conjunto eje-raíl-rueda es simétrico valdrá con modelizar exclusivamente la mitad del mismo, teniendo en cuenta que para la solución habrá que aplicar en la sección de simetría las condiciones de contorno correspondientes a ésta (anulación del desplazamiento en la dirección axial del eje).

Una vez se disponga del modelo físico en ANSYS se le asignarán las propiedades del material especificadas en el apartado 7.2 y se mallará, quedando así dispuesto para la aplicación de cualquier carga y condición de contorno.

No se ha aplicado ningún tipo de criterio específico para la elaboración del mallado. Simplemente se ha considerado, en virtud de la experiencia del proyectista en trabajos previos semejantes al que aquí se desarrolla, el tipo y tamaño de malla más adecuado en función del análisis que se desea realizar.

7.4 Metodología para el análisis de tensiones y desplazamientos en el eje ferroviario.

En el presente proyecto se calcularán las tensiones y desplazamientos máximos en el eje ferroviario mediante la aplicación del método de los elementos finitos cuando éste se encuentre sometido a la carga máxima aplicable indicada en el apartado 7.2, es decir 25t, en condiciones estáticas. Con los resultados obtenidos se comprobará que no se supera el valor máximo de tensión fijado en la norma UNE-EN 13103:2010+A1 y que los desplazamientos en el eje pueden ser considerados admisibles. Por otro lado, puesto que para el estudio del eje se debe resolver el modelo completo eje-raíl-rueda, se aprovechará para hallar las tensiones y desplazamientos máximos en dichos componentes.

Por la complejidad de la geometría, estos estudios se realizarán exclusivamente aplicando el programa de simulación ANSYS, ya que el cálculo analítico sería difícilmente realizable.

La comprobación de la adecuación del material seleccionado para el eje ferroviario es una de las motivaciones que conduce al análisis de las tensiones y deformaciones en el mismo. La selección del material de los componentes mecánicos es una de las decisiones más importantes que ha de tomarse en el diseño de los mismos. Esta decisión, normalmente precede al dimensionamiento de la pieza y, posteriormente, mediante análisis tensionales y en

la fase de ensayos y experimentación, se comprueba la idoneidad de la decisión tomada. En la mayoría de los casos, la selección del material es algo rutinario, ya que la experiencia de diseño de otras piezas similares proporciona la mayor garantía posible de éxito pues el material elegido debe asegurar un buen comportamiento de la pieza, pero también ha de tener en cuenta otros muchos aspectos particulares del componente mecánico. [47]

Para el estudio de las tensiones en el eje ferroviario, debe tenerse en cuenta que el estado tensional en un punto de un sólido viene definido por un tensor de tensiones $[\sigma]$, que tiene hasta seis componentes independientes. El tensor diagonalizado contiene únicamente los valores de las tres tensiones principales. En el diseño de una pieza puede ser necesario recurrir a un criterio de fallo frente a tensión fijando un valor de la tensión de fallo. En el caso de piezas sometidas a solicitaciones estáticas, como es el caso que se analizará en este proyecto, esta tensión de fallo puede ser la de fluencia (650MPa) o la de rotura (850MPa). Estos valores de la tensión de fallo provienen de los resultados de los ensayos de tracción sobre probetas. En el caso objeto de estudio, por consideraciones de seguridad, se supondrá como tensión de fallo la correspondiente a la tensión de fluencia. También debe ser considerado que las probetas en un ensayo de tracción están idealmente sometidas a un estado de tensión uniforme uniaxial. Si en un punto de una pieza cualquiera, distinta de la probeta, existe un estado de tensión uniaxial es muy sencillo saber si se va a producir el fallo o no sin más que comparar el valor de la tensión a la que está sometida la pieza con el valor de la correspondiente de fallo. Si, por el contrario, el tensor de tensiones en otro punto cualquiera no corresponde a una situación de tensión uniaxial, ya no es posible la comparación directa con los resultados del ensayo de tracción, por lo que habrá que emplear alguna teoría de tensiones equivalentes, también conocidas como teorías de fallo o de rotura [47] y que han sido mencionadas en el capítulo 5. Mediante ANSYS, se aplicará la teoría de fallo de Von Mises.

En cuanto a la fiabilidad de los resultados que se obtendrán mediante la aplicación del MEF, no hay que olvidar que el concepto determinista no se corresponde con la realidad del mundo físico, y no sólo desde un punto de vista estricto, sino tampoco como una aproximación práctica válida sin más análisis adicionales para estudios aproximados. El calificativo de “aproximados” es el que hay que dar (en el mejor de los casos) a cualquiera de los métodos existentes para el análisis y la simulación de sistemas. El concepto de incertidumbre es inseparable de cualquier actividad humana y, por supuesto, de las que se llevan a cabo en el desarrollo de elementos mecánicos: diseño, análisis, experimentación, fabricación, etc. Se puede pensar que ello se debe a la falta de conocimiento de la naturaleza y que, a medida que se vaya profundizando en él, se podrá ir reduciendo el nivel de incertidumbre. Eso es indudablemente cierto, pero es un error pensar que, si ese conocimiento pudiera llegar a explicar hasta las raíces más profundas de las causas que rigen los fenómenos naturales, ello implicaría la eliminación de la incertidumbre. La materia se rige por leyes que sólo pueden ser explicadas de forma probabilística, lo que conduce a que no pueden existir fenómenos físicos estrictamente deterministas. [47]

Así pues, bien sea porque no se conocen suficientemente determinados factores implicados en un fenómeno físico, o porque son de índole estadística y no se desea realizar un estudio probabilístico, o porque, aun pudiendo conocerlos, no se toman intencionadamente en consideración (o sólo se toman en parte a través de hipótesis simplificadoras), es necesario disponer de un margen de seguridad que cubra todos los factores mencionados, lo que se denomina habitualmente en ingeniería **coeficiente de seguridad**. [47]

El concepto de coeficiente de seguridad es algo fundamental cuando se aplican técnicas de simulación. Existe la errónea tendencia de creer que los resultados obtenidos mediante una simulación son definitivos y esto no es así. Mediante una técnica de simulación es imposible

representar fielmente la realidad por lo que, aunque los resultados pudieran ser más cercanos a las misma que los obtenidos mediante métodos analíticos de cálculo (que no tiene por qué), deben ser verificados mediante técnicas experimentales.

Por tanto, los resultados que se obtengan mediante el análisis de tensiones y desplazamientos (y esto es extrapolable a todos los estudios que se realicen en el presente proyecto) no deberán ser considerados reales, sino una aproximación de la realidad que se intentará que sean lo más cercanos posibles a la misma.

7.5 Metodología para el análisis modal del eje ferroviario.

El análisis modal se emplea para determinar las características vibratorias de una estructura con comportamiento elástico y lineal, identificando las frecuencias y formas naturales con las que vibra una estructura. Es el tipo de análisis dinámico más importante, y debe hacerse siempre previamente a cualquier otro, pues las características vibratorias de una estructura determinan cómo responde ésta ante cargas dinámicas. [48]

Un fenómeno bien conocido en el campo de las vibraciones mecánicas, y en el que se debe poner especial atención, es el conocido como **resonancia**. Este suceso es de gran interés en los estudios modales, ya que se encuentra relacionado con diferentes eventos destructivos en la historia de la industria (ver figura 144). [48]



Figura 144. Entrada en resonancia del puente de Tacoma Narrows.

El fenómeno de la resonancia se produce cuando la frecuencia de la excitación coincide con la frecuencia natural del sistema. En ese momento, el factor de amplificación dinámica, que puede ser considerado como el cociente entre la amplitud de la frecuencia de la respuesta forzada del sistema entre la amplitud de la frecuencia de excitación, se incrementa de forma notable y da lugar a efectos estructurales indeseados. [48]

Todas las anteriores son las razones por las que se ha decidido llevar a cabo el análisis modal del eje ferroviario; teniendo en cuenta que, para dicho estudio, no se considerará el conjunto eje-raíl-rueda sino el eje libre en el espacio, del que se obtendrán sus frecuencias propias de vibración. Esto se llevará a cabo, exclusivamente, mediante la aplicación del MEF (ANSYS 10).

7.6 Metodología para el análisis a fatiga del eje ferroviario.

Como se ha comentado en capítulos anteriores, la mayoría de las solicitaciones que actúan sobre componentes mecánicos son dependientes del tiempo. De hecho, la hipótesis de carga estática es una idealización que no corresponde con la realidad pues no existen solicitaciones estrictamente estáticas. No obstante, como se ha visto, hay muchas situaciones en las que es conveniente realizar análisis estructurales en equilibrio estático, con los que se obtienen unas soluciones lo suficientemente aproximadas con bajo coste. También se puede recurrir a la hipótesis cuasiestática, más costosa pero igualmente sencilla conceptualmente. En otros casos es evidente la necesidad de realizar cálculos dinámicos. Sin embargo, la frontera que separa los tres campos (estático, cuasiestático y dinámico) no está claramente definida. [47]

En el caso de solicitaciones estáticas, las teorías de fallo y fractura proporcionan una interpretación de los efectos que las tensiones resultantes de un análisis producen sobre el material mediante la comparación con los resultados de unos ensayos relativamente sencillos (como, por ejemplo, el de tracción mencionado en el apartado 7.4). Sin embargo, cuando las tensiones varían con el tiempo, como es el caso de un eje ferroviario girando, el comportamiento del material es diferente y no puede ser analizado con los criterios estáticos. En principio, el comportamiento con tensiones variables debe ser estudiado a partir de los métodos del análisis de fatiga [47] explicados en el capítulo 5.

La característica más peligrosa de los fallos por fatiga es que se producen con deformaciones pequeñas del sistema estructural constituidos por materiales que, con carga estática, se deforman notablemente antes de romper. Así, apenas hay indicios previos de que se va a producir una rotura por fatiga, a menos que se detecte la presencia de la grieta mediante algún sistema de inspección. [47]

Por todo lo anterior, se considera necesario llevar a cabo un análisis a fatiga del eje ferroviario. Para ello, se intentará simular, lo más fielmente posible, el conjunto eje-rueda sometido a la carga máxima planteada anteriormente (25t) girando sobre el raíl. Se comprobará que, bajo las condiciones descritas, el eje cumple condiciones de vida infinita según los principios descritos en el capítulo 5 (teóricamente, el eje ferroviario debe soportar, entre revisión y revisión, $3 \cdot 10^8$ ciclos, lo que equivale a vida infinita).

Este análisis se llevará a cabo aplicando tanto el método de los elementos finitos (ANSYS 10) como técnicas analíticas.

7.7 Metodología para el análisis a fatiga del eje ferroviario fisurado.

En los análisis que se han planteado hasta el momento, se ha estado considerando únicamente la duración de una pieza sometida a un estado de tensiones variable. Obviamente, se cuenta con que, al cabo de un cierto número de ciclos, la pieza tendrá al menos una grieta de tamaño macroscópico cuyo crecimiento será el que produzca la rotura.

Se ha podido comprobar el interés de ese enfoque, pues permite realizar cálculos para verificar la viabilidad de diseños previamente a los ensayos de prototipos. Sin embargo, también es interesante prever como crece una determinada grieta en una pieza sometida a fatiga. Este conocimiento proporcionará datos muy valiosos desde el punto de vista de aplicación práctica, así como para la comprensión del fenómeno de propagación de grietas por fatiga y de la fatiga de materiales en general.

Así, si se sabe que una pieza ha sido diseñada a duración finita para funcionar durante un número N de ciclos, o un tiempo equivalente de trabajo, con un margen de seguridad a duración MS , es razonable esperar que a medida que la duración se acerque a ese valor N exista ya alguna grieta en la pieza, pues de hecho se ha diseñado sabiendo que, de continuar trabajando, acabará por romper. Ahora bien, quien observa una grieta en una pieza en esas condiciones no se quedará tranquilo a menos que tenga algún criterio que le permita realizar una estimación del tiempo previsible hasta la rotura.

Afortunadamente, la Mecánica de la Fractura en Fatiga es una herramienta válida para ayudar a responder las cuestiones planteadas en los párrafos anteriores, pues permite realizar predicciones aproximadas, pero cuantitativas, sobre el crecimiento de grieta. Además, esta técnica puede ser contemplada no sólo como algo útil durante la vida en servicio de las piezas, sino también para su diseño como un criterio adicional al de los cálculos tradicionales.

Existe una teoría lineal de la mecánica de la fractura (MFLE, explicada en el capítulo 5) y una teoría elastoplástica. En los análisis que se van a realizar, se aplicará la MFLE, pues la teoría elastoplástica es altamente compleja.

Por las razones anteriormente expuestas, en este Proyecto se intentará emplear el método del balance de energías o de la extensión virtual de la fisura (también explicado en el capítulo 5) para obtener el valor del Factor de Intensidad de Tensiones (FIT), parámetro básico en la aplicación de la Mecánica de la Fractura Lineal y Elástica, de una fisura generada en el mismo eje ferroviario para el que se han planteado el resto de análisis. Ello, a su vez, se llevará a cabo mediante la aplicación del método de los elementos finitos.

Asimismo, se calculará el FIT mediante técnicas analíticas consolidadas con el objeto de comparar los resultados analíticos y de la simulación para conocer la bondad del método de los elementos finitos en el estudio de ejes ferroviarios ya fisurados.

7.8 Metodología para la aplicación del MEF al análisis adimensional de ejes ferroviarios.

Como se indicó en el apartado 7.4, “los resultados que se obtengan mediante el análisis de tensiones y desplazamientos (y esto es extrapolable a todos los estudios que se realicen en el presente proyecto) no deberán ser considerados reales, sino una aproximación de la realidad que se intentará que sean lo más cercanos posibles a la misma.” Por ello, se considera indispensable que, para verificar la cercanía a la realidad de los resultados obtenidos, se lleven a cabo ensayos experimentales de los ejes.

No es objeto de este proyecto realizar estos ensayos. Sin embargo, sí se planteará la forma en que los resultados que se obtengan de los bancos de ensayos escalados (figuras 145, 146 y 147) se deben extrapolar a la realidad; a un posible eje real, en concreto.



Figura 145. Banco ensayos de ejes ferroviarios a escala 1:8.

Por ello, teniendo en cuenta que lo que se buscará serán relaciones adimensionales entre los diferentes parámetros de influencia de interés para los ensayos, se podrá utilizar el método de los elementos finitos para encontrar dichas correspondencias debido a que, aunque los resultados absolutos que ofrezca no sean correctos, las relaciones entre diferentes soluciones -al estarse aplicando la teoría de la elasticidad- sí que lo serán. De este modo, se dispondrá de un método sencillo para conocer los diferentes parámetros adimensionales que resulten útiles.

Así, para la obtención de los parámetros adimensionales mencionados, se llevará a cabo el análisis adimensional (de manera analítica y mediante ANSYS 10) de estructuras simples,

tales como cilindros, donde se analizarán tensiones, desplazamientos, fuerzas, modos propios de vibración, etc. en función de escalas que variarán desde 1:1 a 1:10 y de diferentes materiales constituyentes.

Conociendo todo lo expuesto, conviene mencionar que el departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Carlos III de Madrid dispone de dos bancos de ensayos de ejes ferroviarios a escala 1:5 (ver figura 147) y 1:8 (ver figuras 145 y 146). Por ello, el último estudio que se planteará consistirá en comprobar, mediante simulación por el método de los elementos finitos, que las relaciones adimensionales obtenidas para estructuras simples se cumplen en el conjunto, más complejo, eje-rail-rueda escalado a 1:4 (equivalente a 1:8) y a 1:5.



Figura 146. Equipo de adquisición de datos para el banco ensayos de ejes ferroviarios a escala 1:8.

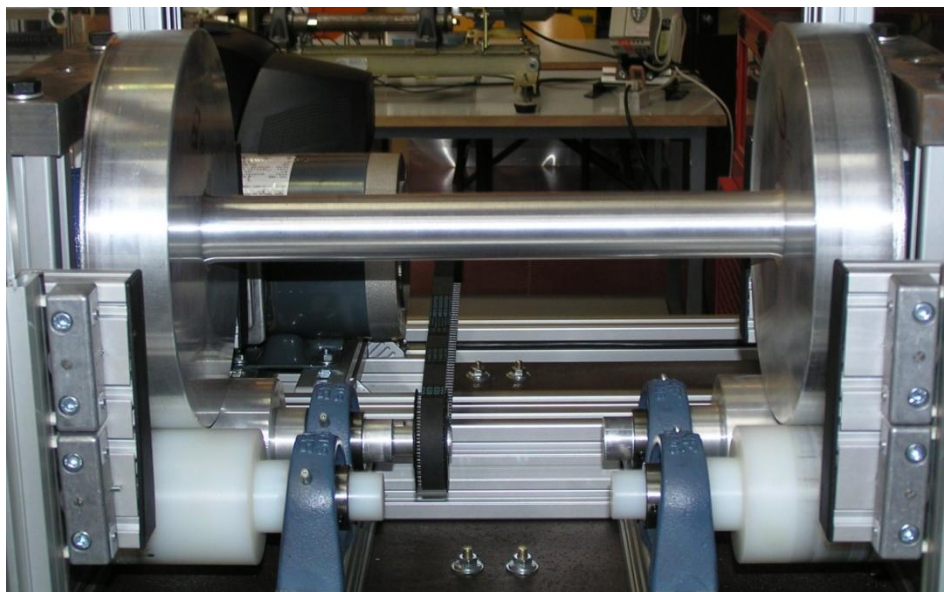


Figura 147. Banco ensayos de ejes ferroviarios a escala 1:5 con cilindros simulando las ruedas.

Capítulo 8

Estudio de tensiones y desplazamientos en el conjunto eje-raíl-rueda de un ferrocarril.

8.1 Introducción.

Los modelos matemáticos y métodos numéricos avanzados y, en particular, el Método de los Elementos Finitos (MEF), aplicados al análisis del comportamiento mecánico de infraestructuras ferroviarias (ver figura 148) sometidas a cargas de tráfico se generaliza a partir de inicios de los años 80, gracias a una notable expansión de la utilización de dicho método y al aumento de la potencia de cálculo de los ordenadores.[22]

Son de especial relevancia los trabajos desarrollados por la ORE de la UIC, y que se publicaron en 1983 en los diferentes informes de la “QUESTION D117: ADAPTATION OPTIMALE DE LA VOIE CLASSIQUE AU TRAFIC DE L’AVENIR” ([23], [24], [25], [26], [27]). Dichos informes dan cuenta de los resultados obtenidos mediante la modelización del sistema completo de vía

(carriles, traviesas, capas de forma y plataforma) mediante un modelo MEF 3D con aplicación de leyes elastoplásticas de comportamiento así como de su comparación con los resultados obtenidos en diferentes ensayos a escala real. Finalmente, y gracias a la aplicación del modelo MEF y de la ley de Dormon (deducida de ensayos de la AASHO), se establecen unos ábacos y unas tablas para el dimensionamiento de las capas de asiento. [22]

A partir de 1994, bajo la dirección de la DGITF, PROINTEC retoma y desarrolla esta metodología, empleando un programa de cálculo basado en el MEF con una modelización 3D y leyes de comportamiento elastoplástico. En una primera etapa de estos estudios se estableció contacto con organismos y técnicos que participaron en el desarrollo de los trabajos de la ORE, completando la documentación existente al respecto ([28], [29], [30], [31]). [22]

Esta metodología ha sido desarrollada y empleada para el dimensionamiento de las capas de forma y, en particular, para la determinación de la necesidad y del espesor de las capas de refuerzo necesarias (de subbalasto) en varios proyectos de acondicionamiento de líneas existentes. Sin embargo, la aplicación del MEF de la infraestructura ferroviaria permite, además de esta importante aplicación, obtener resultados y estudiar otros problemas de diseño que se desarrollan a continuación. [22]

El gran incremento que está registrando la instalación de trenes de alta velocidad en el curso de los últimos años ha impulsado la fabricación de componentes ferroviarios con propiedades mecánicas mejoradas, capaces de soportar las superiores acciones de servicio, disminuir las operaciones de reposición y mantenimiento, y alargar su vida útil. [32]

El análisis de la integridad estructural de los principales componentes ferroviarios tiene por objeto prevenir su fallo en servicio, lo que está estrechamente ligado a la seguridad de la industria ferroviaria y, además, a sus costes. [32]

Se pone así de manifiesto la importancia de realizar investigaciones en este contexto, con objeto de reducir los fallos en servicio y los riesgos asociados de descarrilamiento de los trenes, así como de reducir los costes que conllevan estos servicios. [32]

Asimismo, la tendencia en los últimos años es la de aumentar la densidad del tráfico ferroviario y la carga sobre los ejes, por lo que los citados problemas tienen cada vez más importancia. [32]

Todo ello motiva que en este capítulo se vaya a aplicar el MEF a la obtención de tensiones y deformaciones sobre el conjunto eje-raíl-rueda de un ferrocarril.



Figura 148. Infraestructura ferroviaria.

8.2 Modelo de elementos finitos del conjunto eje-raíl-rueda.

8.2.1 Introducción.

Como se dijo en el capítulo 7 (Metodología), en este apartado se describirá el proceso de modelización del conjunto eje-rueda-raíl de un ferrocarril (figura 149), siendo el eje el componente en el que se centrará el análisis. Éste tiene una longitud 2470mm y un diámetro que varía desde 150mm hasta 230mm, con los respectivos cambios de sección que esto conlleva (figura 150). Para ello se ha utilizado el software ANSYS 10.0.

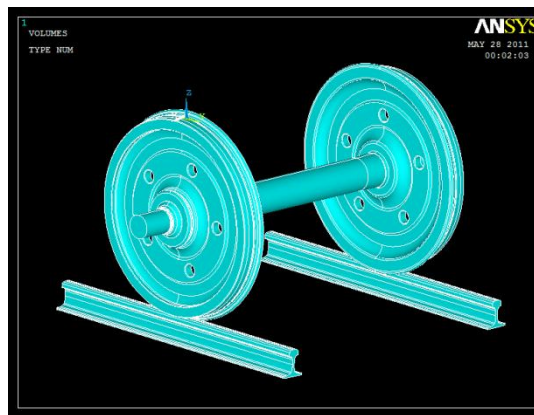


Figura 149. Conjunto eje-rueda-raíl objeto de análisis.

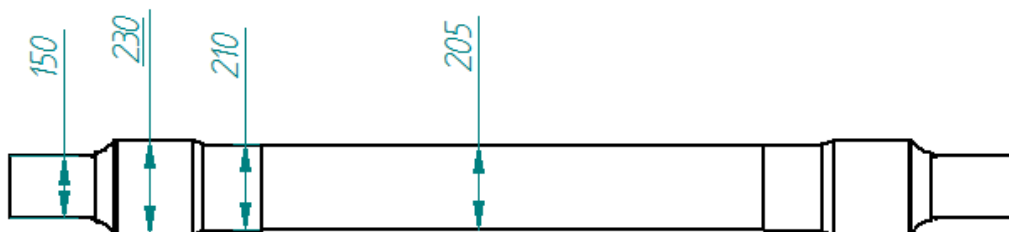


Figura 150. Eje de interés en el análisis.

El interfaz de ANSYS agrupa los comandos de interés en tres grandes bloques: preprocesado, solución y postprocesado. En el preprocesado se establecen las características físicas y geométricas del modelo, siendo la fase que más tiempo requiere del análisis. En la fase de solución, se aplica el sistema de cargas al modelo y se eligen los parámetros de solución del sistema de ecuaciones que genera el problema. Finalmente, en la fase de postprocesado se obtienen los resultados del análisis y se presentan de múltiples formas:

gráficas, animaciones, listas de datos, etc., pudiéndose así obtener las conclusiones que procedan. [34]

8.2.2 Generación de la geometría del modelo utilizando Solid Edge.

Tal y como se indica en el capítulo de metodología, debido a la complejidad que conlleva la generación de geometrías en el interfaz de ANSYS, se decidió construir la misma utilizando la aplicación informática Solid Edge.

Solid Edge es un programa de diseño de piezas tridimensionales asistido por computador. Permite a los ingenieros el modelado de elementos de distintos materiales, doblado de chapas, ensamblaje de conjuntos, soldadura y funciones de dibujo en plano.

Se comienza con la modelización de las piezas que forman el conjunto de manera individual a partir de los planos de los que se dispone y conociendo que el **raíl** tiene un perfil tipo **UIC60** (ver figuras 151, 152 y 153).

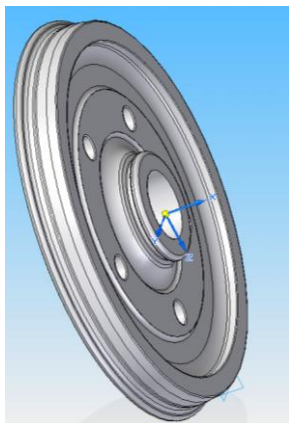


Figura 151. Rueda construida en Solid Edge.

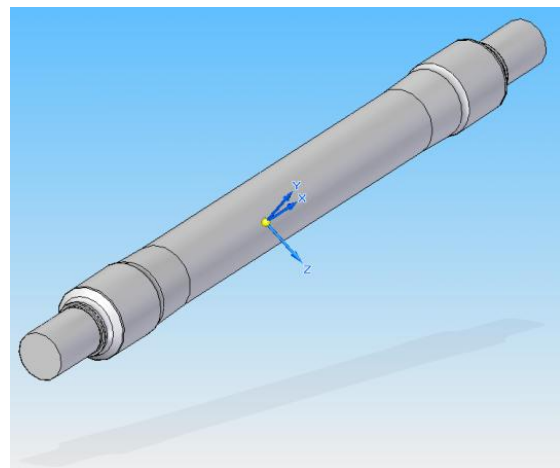


Figura 152. Eje construido en Solid Edge.

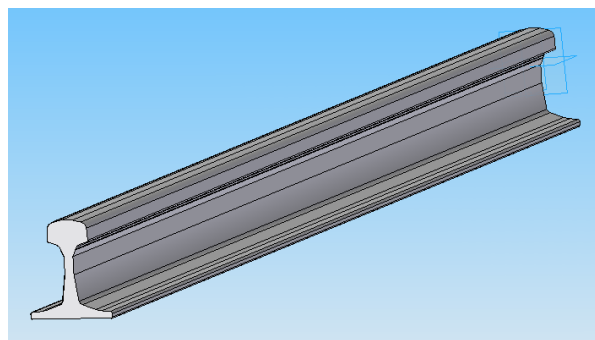


Figura 153. Raíl UIC60 construido en Solid Edge.

Construidos los componentes del conjunto, y sabiendo las relaciones existentes entre ellos, que se indican a continuación:

- Ángulo de inclinación del raíl UIC60 : $5\% \approx 2,86^\circ$
- Ancho de vía: 1668 mm

se genera el conjunto que se muestra en la figura 154.

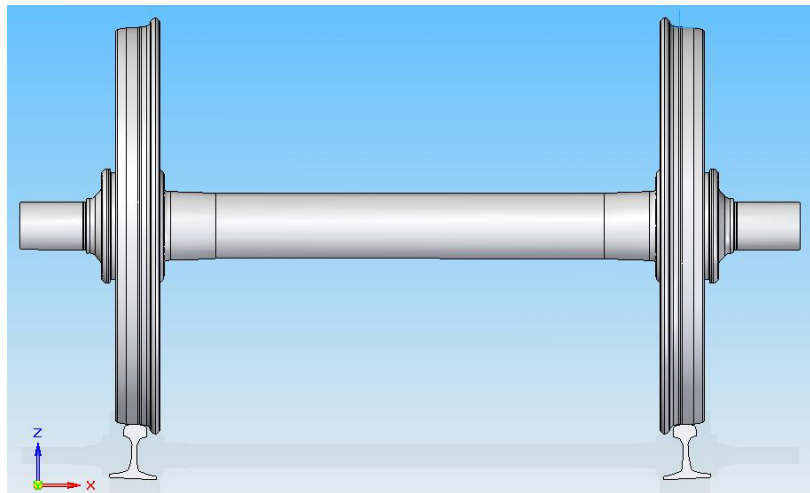


Figura 154. Conjunto eje-raíles-ruedas construido en Solid Edge.

Por último, se convierte el conjunto construido en un archivo con extensión .iges, ya que **IGES** es la especificación para intercambio inicial de gráficos (Initial Graphics Exchange Specification), que define un formato neutral de datos facilitando el intercambio digital de información entre sistemas de diseño asistido por computador CAD.

Esto permitirá llevar a cabo el análisis por elementos finitos de una geometría creada en Solid Edge utilizando la aplicación informática ANSYS.

8.2.3 Análisis por elementos finitos mediante ANSYS.

8.2.3.1 Preprocesado.

La fase de preprocesado se divide en varias subfases:

- Definición del tipo de análisis.
- Definición del tipo de elemento finito a utilizar.
- Definición del modelo de material.
- Generación de la geometría del modelo.

- Mallado del modelo y definición de las propiedades del elemento seleccionado.

A) Definición del tipo de análisis.

La elección del tipo de análisis depende de las condiciones de carga aplicadas al modelo y de los resultados que se pretenden obtener.

El tipo de análisis que se utilizará en este caso será el estático (ver figura 155), para la determinación de los desplazamientos, deformaciones y tensiones en el eje del ferrocarril.

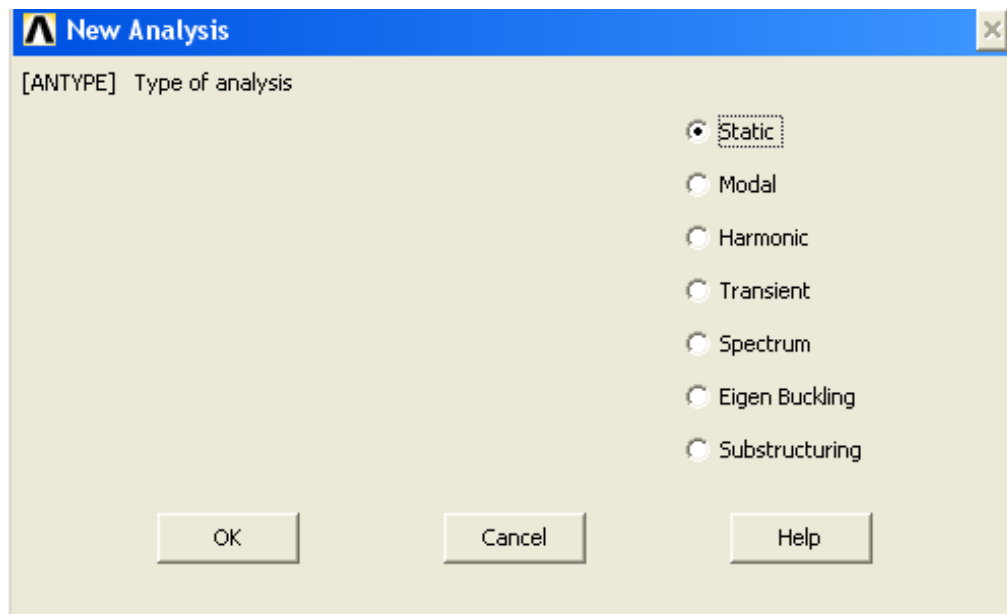


Figura 155. Selección del tipo de análisis.

B) Definición del tipo de elemento finito a utilizar.

El tipo de elemento elegido es SOLID45 (ver figura 156). Éste es un tipo de elemento tridimensional que puede adquirir tanto forma tetraédrica como forma hexaédrica. Para la discretización del modelo generado se considerarán elementos tetraédricos ya que, como se explica en el apartado 6.5.5, al ser éstos una generalización tridimensional del elemento triangular, tienen en el espacio una gran adaptabilidad. Esta condición fundamenta la elección de elementos tetraédricos, pues, a diferencia de lo que ocurre, por ejemplo, con elementos tipo placa, discretizar adecuadamente un conjunto con elementos tridimensionales conlleva mayor complejidad.

El elemento SOLID45 queda definido por ocho nodos y por las propiedades del material, es decir, no es necesario definir un conjunto de constantes reales para este tipo de elemento. Cada uno de los nodos posee tres grados de libertad: las traslaciones en los tres ejes x , y y z . La combinación de los desplazamientos de sus ocho nodos permite mostrar a este elemento, prácticamente, cualquier tipo de deformación. [41]

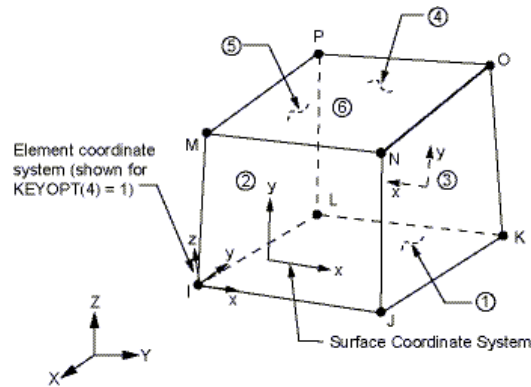


Figura 156. Elemento SOLID45.

C) Definición del modelo de material.

Relativo al modelo de material utilizado, la mayoría de los tipos de elementos requieren propiedades del material. Estas propiedades pueden ser lineales o no lineales y, dentro de un mismo análisis, se pueden utilizar múltiples conjuntos de propiedades de material que corresponden al número de materiales diferentes presentes en el modelo, definiendo aspectos como la elasticidad, el módulo de Young o el coeficiente de Poisson del material.

En la figura 157 se muestra la elección de las características del modelo de material en ANSYS.

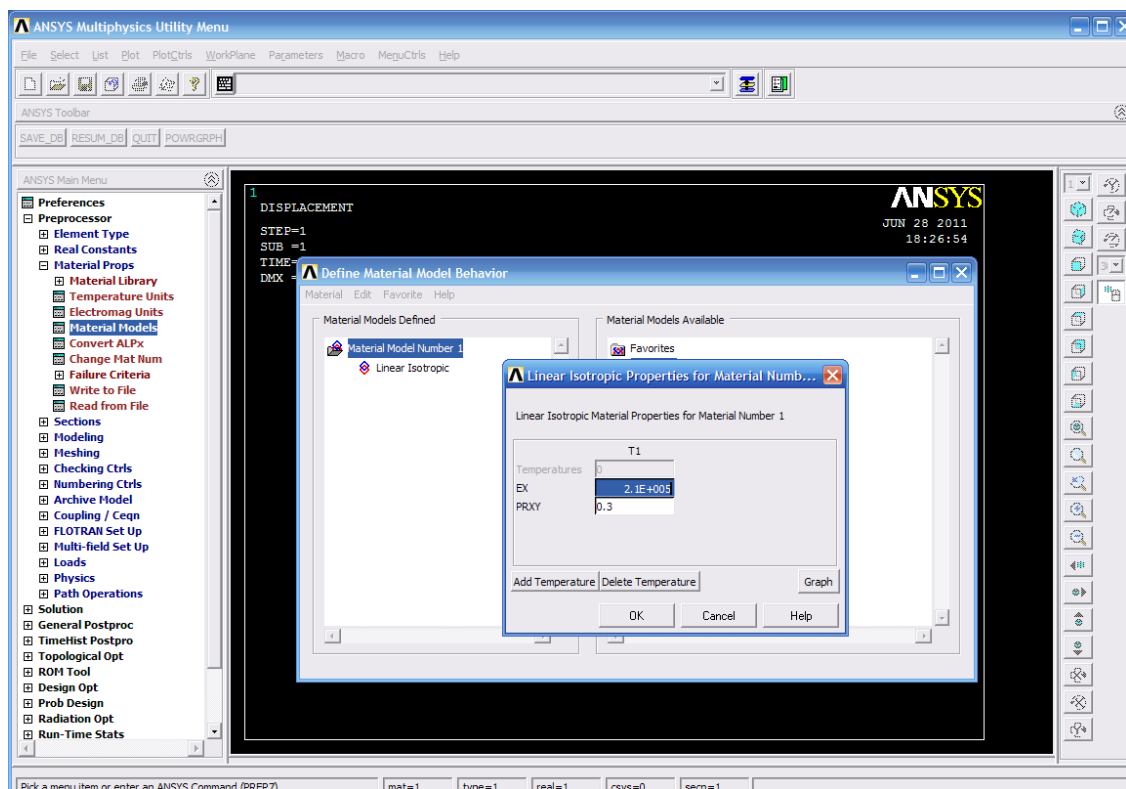


Figura 157. Selección de las características del material en ANSYS.

En el caso objeto de análisis, el material utilizado en la construcción del eje ferroviario es acero F222, cuyas propiedades mecánicas son:

- Módulo de elasticidad: 210 GPa
- Coeficiente de Poisson: 0,3
- Resistencia en estado bonificado (templado y revenido) : $650 - 800 \text{ MPa}$

D) Generación de la geometría del modelo.

Anteriormente se ha explicado cómo se ha llevado a cabo la geometría del modelo a analizar. En la figura 158 se observa el modelo exportado a ANSYS.

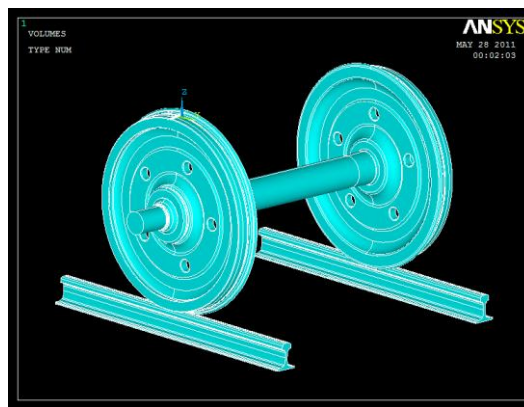


Figura 158. Geometría del modelo exportado a ANSYS.

E) Mallado del modelo.

Para el mallado del modelo es necesario tener en cuenta que la aplicación ANSYS exige que el ordenador sea lo suficientemente potente (en cuanto a capacidades del procesador, del disco duro y de la memoria RAM se refiere) para poder llevar a cabo el cálculo de la solución a partir del tamaño o del número de elementos finitos seleccionados.

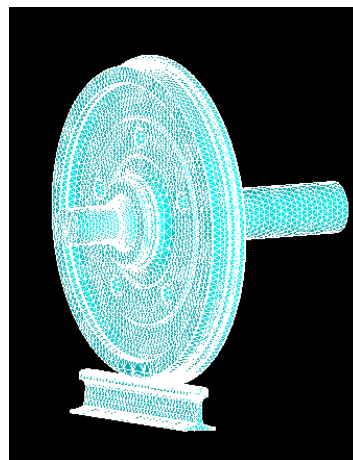


Figura 159. Modelo a analizar mallado.

Puesto que las capacidades de las herramientas de las que se dispone son limitadas, se decidió aplicar condiciones de simetría sobre el conjunto. Esto permitió que, únicamente, hubiera que analizar la mitad del mismo. En la figura 159 se muestra cómo quedaría el modelo mallado habiendo aplicado las condiciones de simetría comentadas.

8.2.3.2 Solución.

La fase de solución se divide en dos subfases:

1. Aplicación de cargas.
2. Solución.

La aplicación de cargas no sólo está referida a la aplicación de las fuerzas externas, sino también a la de los desplazamientos y condiciones de contorno que hacen que el sistema de fuerzas al que está sometido el modelo de elementos finitos se aproxime, lo más posible, al sistema de fuerzas existentes en la realidad.

Como se mencionó en la metodología, en el caso del conjunto eje-ruedas-raíles se ha anulado el desplazamiento horizontal en la superficie que estaba cortada por el eje de simetría (aplicación de las condiciones de contorno a un conjunto simétrico cuando se divide por la mitad) y se han anulado todos los desplazamientos en la base del raíl. Así mismo, se ha aplicado una carga de 125 kN (25t) uniformemente repartida en la zona del eje que estaría soportando el vagón (lo que indica que, si se estuviera analizando el eje completo, éste estaría soportando una carga de 250 kN, tal y como se muestra en la figura 160).

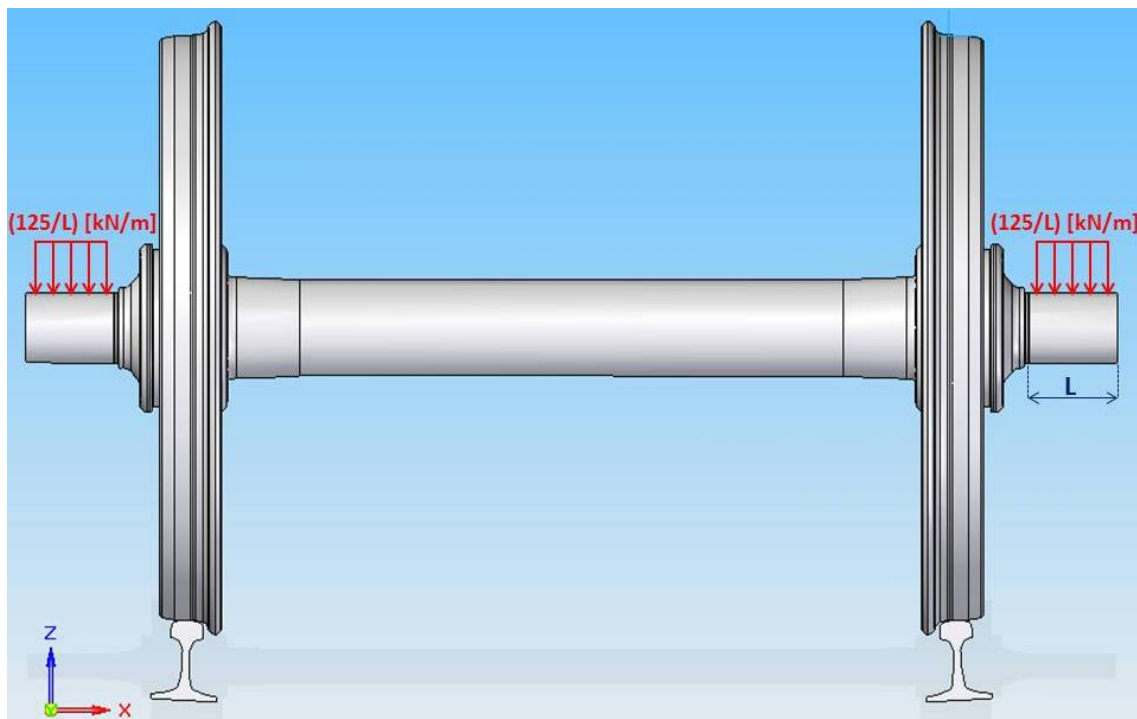


Figura 160. Conjunto eje-raíles-ruedas con cargas a aplicar.

No debe olvidarse que, entre el eje y la rueda, existe un apriete IT01 100 μm . Esto hace que se deba aplicar, para el análisis, una precarga en la zona donde se unen ambos componentes. El valor de dicha precarga, analizando el eje en la zona de unión con la rueda como un cilindro macizo, vendrá dado por la ecuación:

$$P_f = \frac{\delta \cdot E \cdot (r_0^2 - r_f^2)}{2 \cdot r_0^2 \cdot r_f}$$

donde:

- δ es la variación de radio que sufre el eje por el apriete.
- E es el módulo de elasticidad.
- r_0 es el radio inicial del eje antes de llevar a cabo la precarga.
- r_f es el radio final del eje una vez llevada a cabo la precarga.

Aplicando esta ecuación se obtiene que:

$$P_f = 158.6 \text{ kPa} = 0.1586 \text{ MPa}$$

Como última consideración, se debe tener en cuenta que ANSYS no reconoce ningún tipo de unidades. Es decir, todas las cargas, medidas y parámetros que se introducen a través de los cuadros de diálogo son adimensionales para el programa, por lo que deben ser dimensionalmente coherentes para que el análisis sea válido.

Es por ello que, para el análisis que se realizará las unidades de tensión serán [MPa], las unidades de fuerza serán [N] y las unidades de longitud serán [mm].

En la figura 161 puede observarse el modelo cargado.

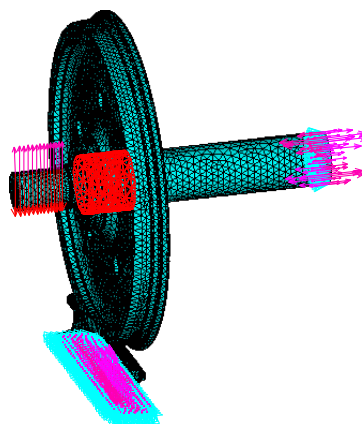


Figura 161. Modelo cargado.

Una vez realizadas las acciones precedentes, se ejecuta el comando de resolución del sistema de ecuaciones generado.

8.2.3.3 Postprocesado.

En el postprocesado se obtienen resultados gráficos (figura 162) y numéricos de la simulación realizada. De esta manera se comprueba que la estructura opera en régimen elástico, que los desplazamientos son pequeños y se hace un estudio tensional a través del que se detectan las zonas más solicitadas.

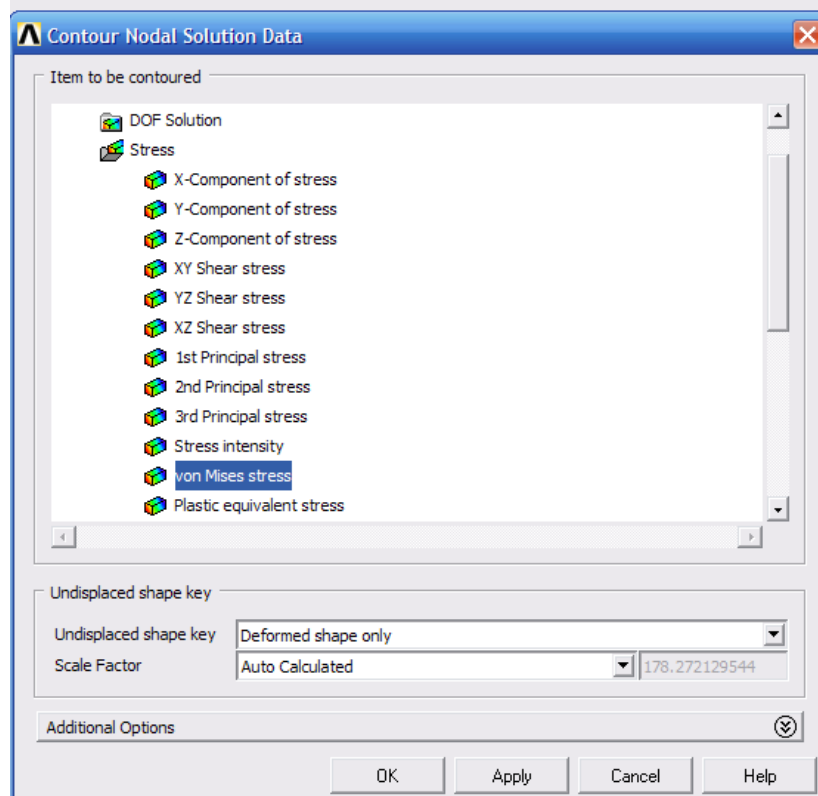


Figura 162. Cuadro de diálogo para la obtención de los resultados gráficos.

8.3 Análisis de resultados.

8.3.1 Análisis de deformaciones y desplazamientos.

En la figura 163 se presenta la deformada del conjunto que se analiza, obtenida como consecuencia de la aplicación de las cargas especificadas anteriormente.

Se observa la existencia de un descenso del eje en la zona de aplicación de la carga, así como un desplazamiento vertical ascendente en la sección media del mismo. Estos pequeños desplazamientos (del orden de 10^{-4} m) inducen, a su vez, el movimiento de la rueda que, como consecuencia, deforma ligeramente el raíl donde se apoya. A continuación se analizarán de forma más específica los desplazamientos en cada uno de los elementos que constituyen el conjunto.

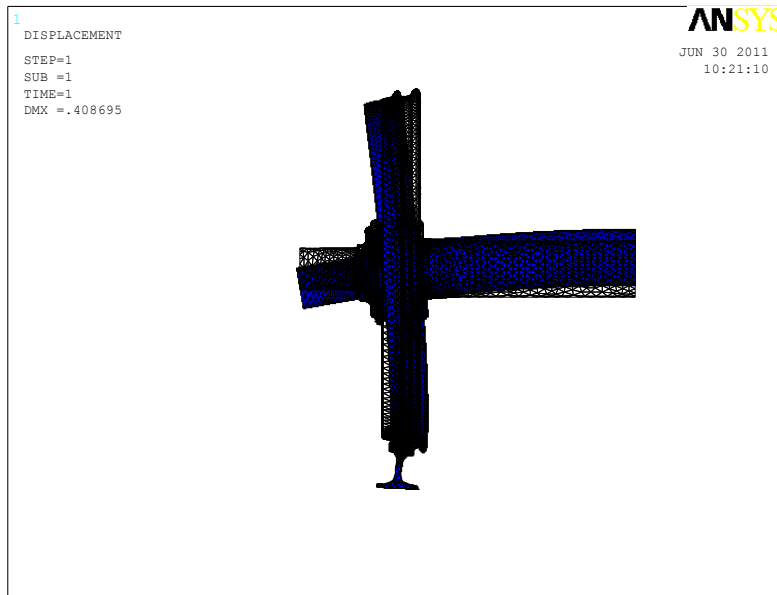


Figura 163. Deformada (escala 180:1) del conjunto objeto de estudio.

8.3.1.1 Análisis de desplazamientos en la rueda.

En la figura 164 puede observarse el desplazamiento vectorial que se produce sobre la rueda respecto de su posición original, consecuencia de la combinación lineal de los desplazamientos en los ejes vertical (figura 165), horizontal (figura 166) y perpendicular a ambos (figura 167).

Nota: En las figuras 165, 166 y 167 los desplazamientos hacia la izquierda (eje horizontal), hacia abajo (eje vertical) o hacia atrás (en profundidad) adquieren color azul oscuro y los desplazamientos hacia la derecha (eje horizontal), hacia arriba (eje vertical) o hacia delante (en profundidad) adquieren color rojo. Todo ello respecto de la posición inicial del conjunto (ver deformada en figura 163).

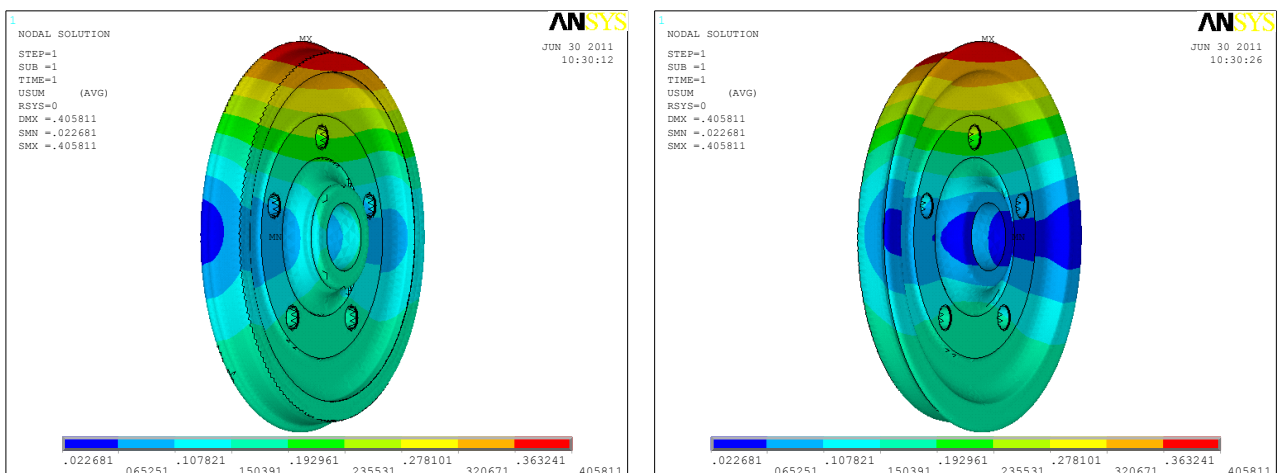


Figura 164. Vector desplazamiento sobre la rueda en la cara exterior (izq.) e interior (dcha.).

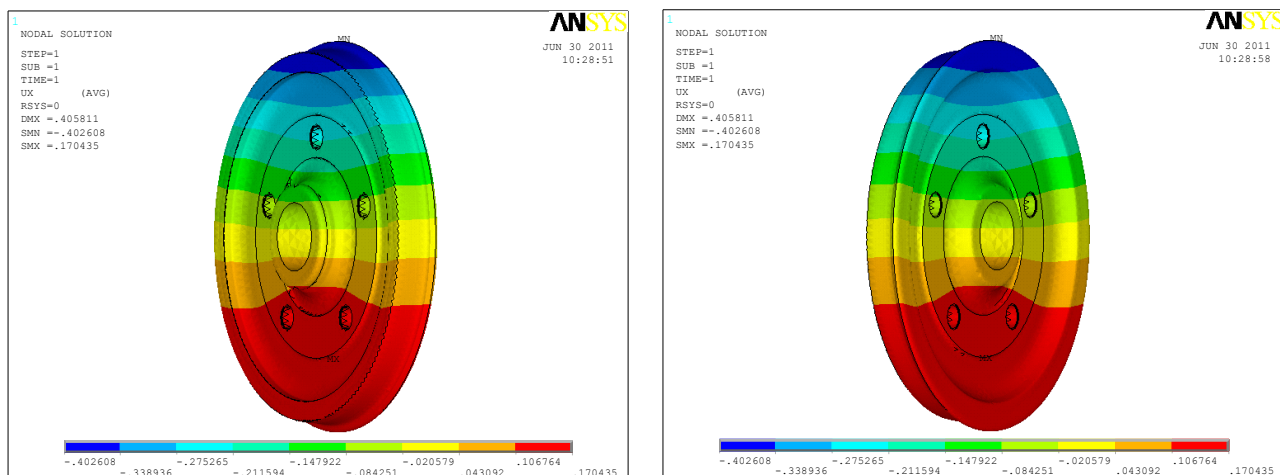


Figura 165. Desplazamientos en eje horizontal de la rueda en la cara exterior (izq.) e interior (dcha.).

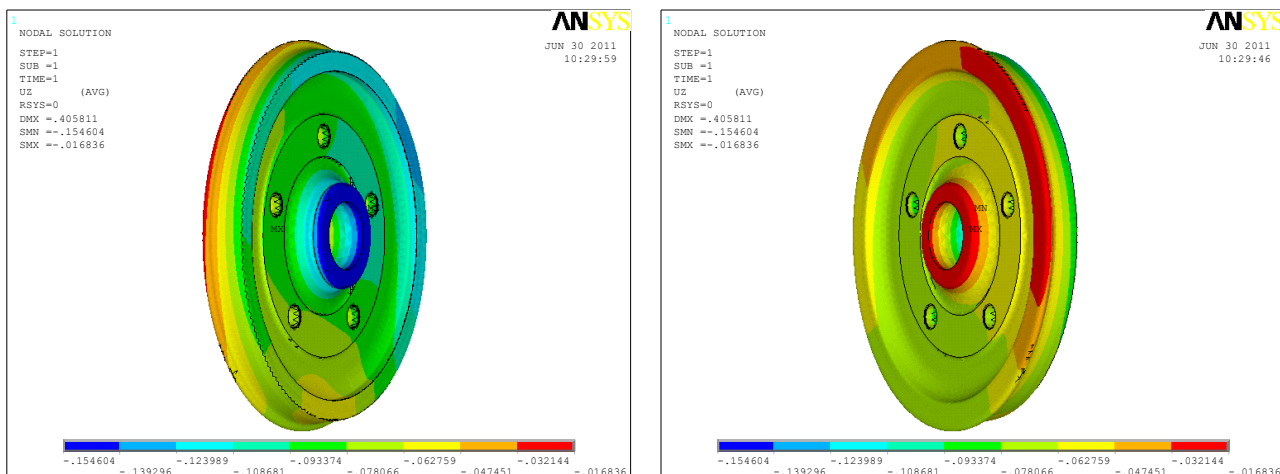


Figura 166. Desplazamientos en eje vertical de la rueda en la cara exterior (izq.) e interior (dcha.).

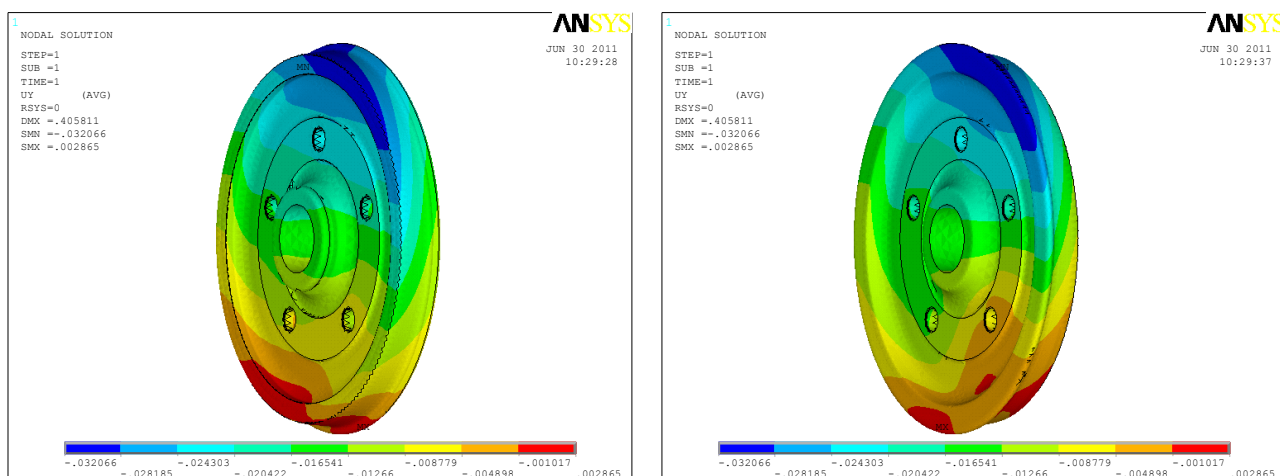


Figura 167. Desplazamientos en profundidad de la rueda en la cara exterior (izq.) e interior (dcha.).

En cuanto a los valores numéricos obtenidos, el vector desplazamiento toma un valor máximo de **0.406 mm** en la parte superior de la rueda (zona roja de la figura 164), mientras que los desplazamientos máximos en los ejes vertical, horizontal y en profundidad son, respectivamente, **0.155 mm** en la zona de unión con el eje (zona azul oscuro de la figura 166), **0.403 mm** en la zona inferior de la rueda (zona roja de la figura 165) y **0.032 mm** en la zona superior de la rueda (zona roja de la figura 167).

8.3.1.2 Análisis de desplazamientos en el raíl.

Continuando con el análisis de los desplazamientos, en la figura 168 se muestra el vector desplazamiento sobre el raíl, adquiriendo un valor numérico máximo de **0.149 mm**.

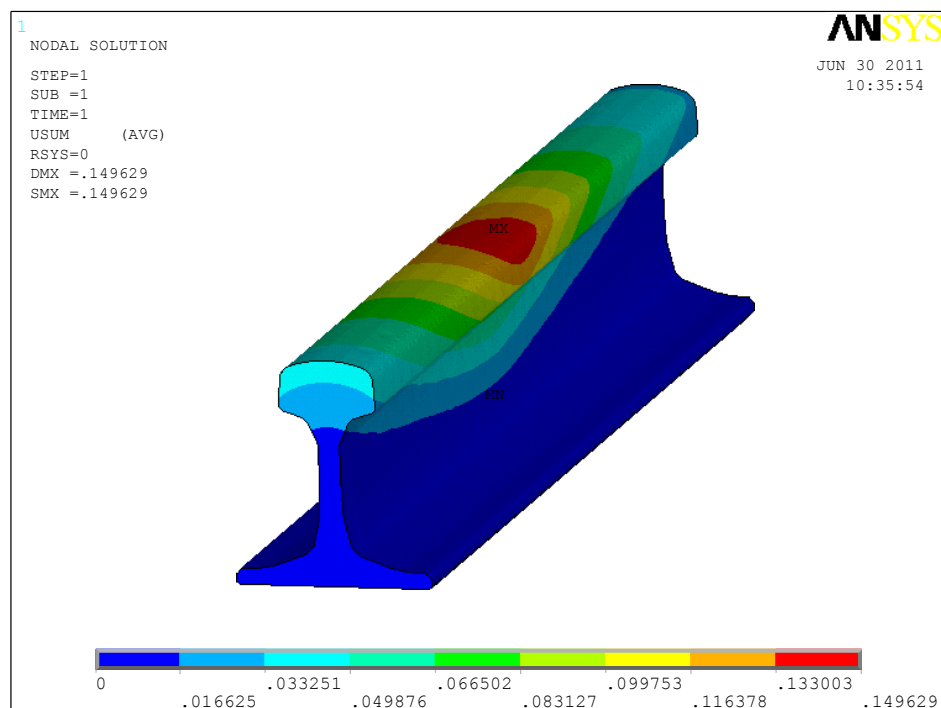


Figura 168. Vector desplazamiento sobre el raíl.

Por otro lado, en las figuras 169, 170 y 171 se pueden ver los desplazamientos en los ejes cuya combinación lineal da lugar al vector de los desplazamientos.

Nota: En las figuras 169, 170 y 171 los desplazamientos hacia la izquierda (eje horizontal), hacia abajo (eje vertical) o hacia atrás (en profundidad) adquieren color azul oscuro y los desplazamientos hacia la derecha (eje horizontal), hacia arriba (eje vertical) o hacia delante (en profundidad) adquieren color rojo. Todo ello respecto de la posición inicial del conjunto (ver deformada en figura 163).

En la zona roja de la figura 169 se refleja el máximo desplazamiento horizontal que se produce sobre el raíl, tomando un valor máximo de **0.143 mm**.

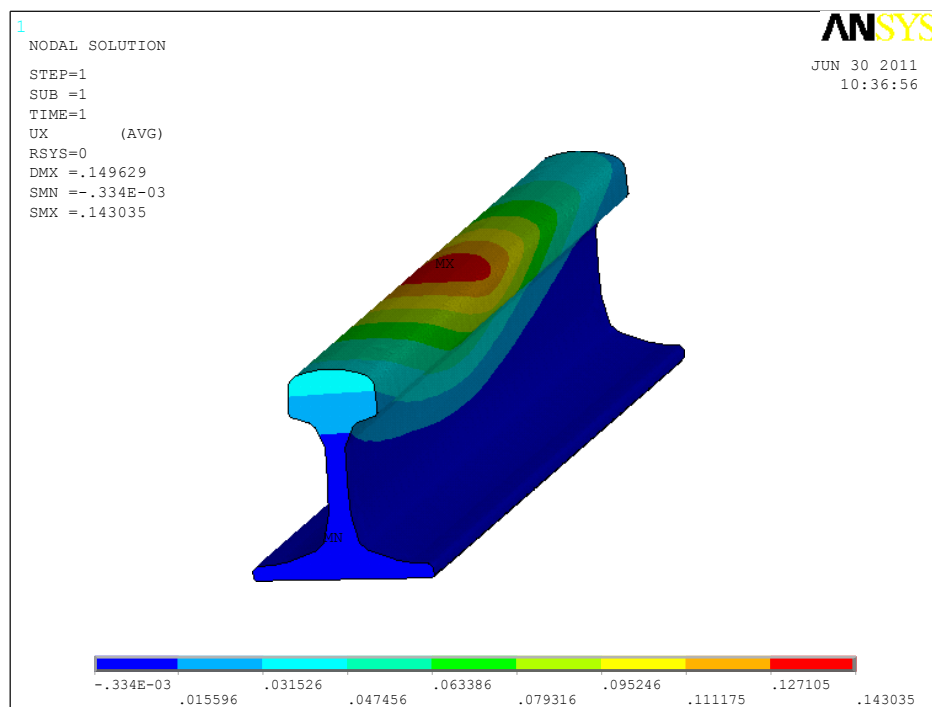


Figura 169. Desplazamientos en eje horizontal del raíl.

En la zona azul de la figura 170 se localiza el máximo desplazamiento horizontal producido sobre el raíl, tomando un valor máximo de **0.075 mm**.

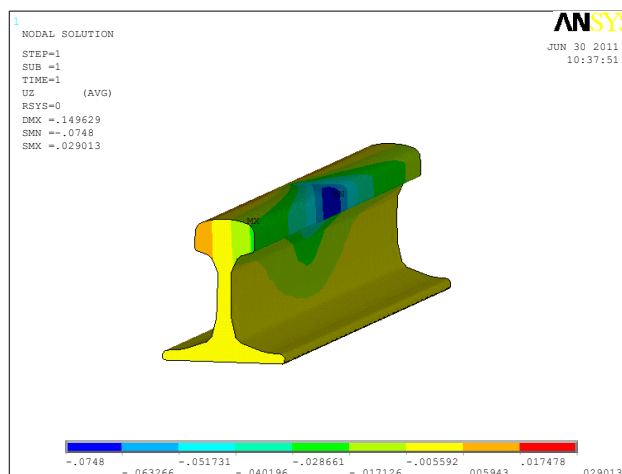
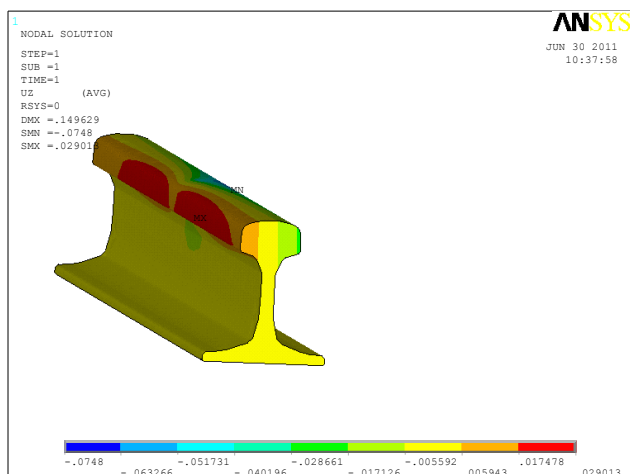


Figura 170. Desplazamientos en el eje vertical del raíl en la cara exterior (izq.) e interior (dcha.).

Por último, en la figura 171 puede verse que los máximos desplazamientos que se producen en profundidad son, por efecto de la carga vertical que se está aplicando y que genera una deformación simétrica respecto de la zona de apoyo de la rueda sobre el raíl, simétricos respecto de dicha zona, con un valor máximo de **0.011mm**.

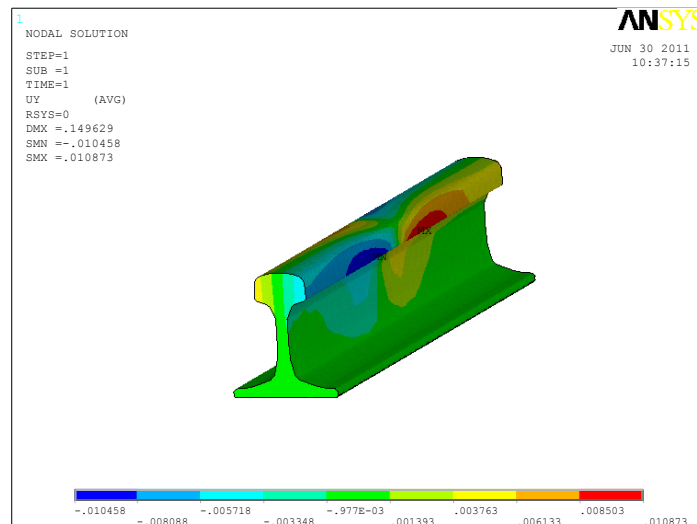


Figura 171. Desplazamientos en profundidad del r il.

8.3.1.3 Análisis de desplazamientos en el eje.

En último lugar, se llevará a cabo el análisis de los desplazamientos en el eje, los que se considerarn de mayor importancia por ser, el análisis del mismo, lo que motiva el presente proyecto.

En la figura 172 se aprecia, tal y como se mostró en los casos anteriores, el vector desplazamiento de cada punto del eje, siendo el mayor desplazamiento existente, en la zona coloreada de rojo, de **0.408 mm**.

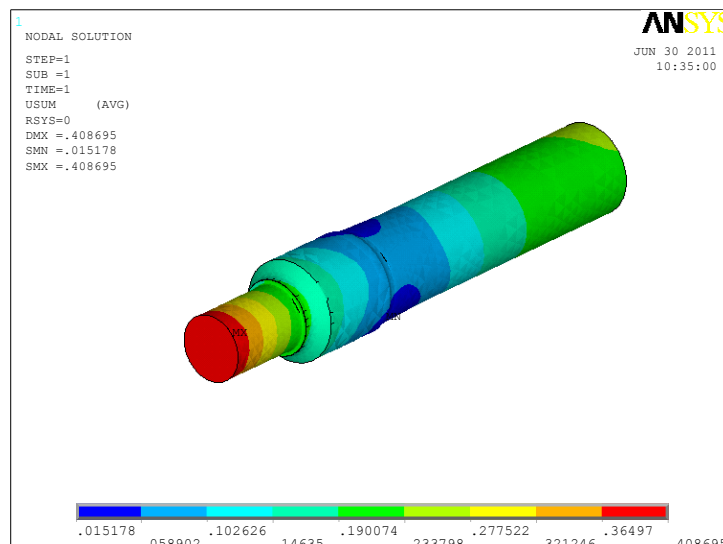


Figura 172. Vector desplazamiento del eje.

Por otro lado, en las figuras 173, 174 y 175 se pueden ver los desplazamientos en los ejes cuya combinación lineal da lugar al vector de los desplazamientos.

Nota: En las figuras 173, 174 y 175 los desplazamientos hacia la izquierda (eje horizontal), hacia abajo (eje vertical) o hacia atrás (en profundidad) adquieren color azul oscuro y los desplazamientos hacia la derecha (eje horizontal), hacia arriba (eje vertical) o hacia delante (en profundidad) adquieren color rojo. Todo ello respecto de la posición inicial del conjunto (ver deformada en figura 163).

La zona azul de la figura 173 muestra el máximo desplazamiento horizontal que se produce sobre el raíl, tomando un valor máximo de **0.083 mm**.

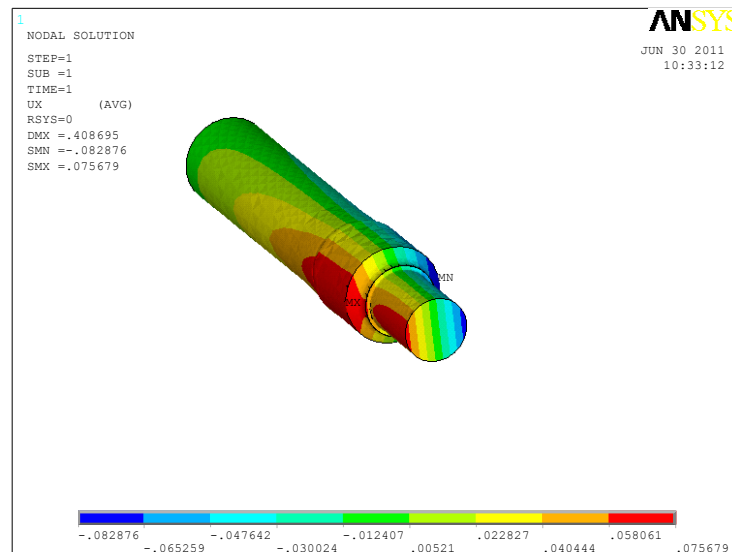


Figura 173. Desplazamientos en eje horizontal del eje.

En la zona azul de la figura 174 se localiza el máximo desplazamiento en profundidad que se produce sobre el eje, tomando un valor máximo de **0.017 mm**.

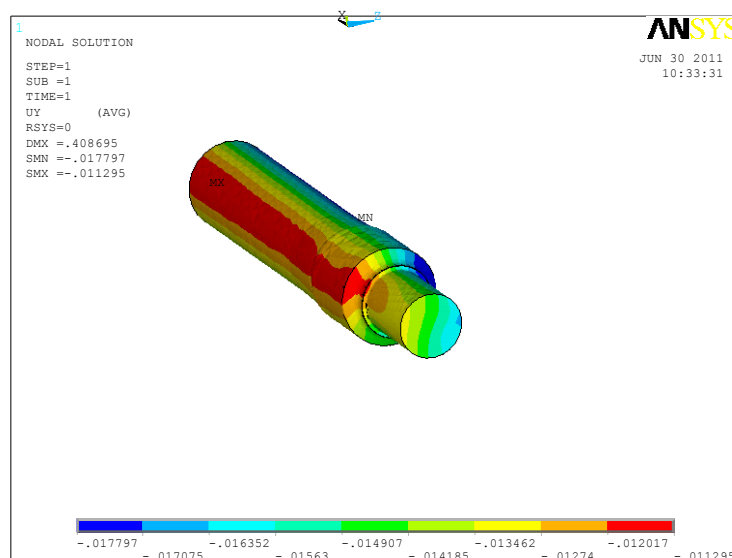


Figura 174. Desplazamientos en profundidad del eje.

Por último, en la figura 175 se observan los máximos desplazamientos que se producen en profundidad en el eje vertical, siendo éstos los de mayor magnitud (adquieren un valor máximo de **0.401 mm** en la zona coloreada en azul y **0.238 mm** en la zona coloreada en rojo) y, por ello, los de mayor importancia.

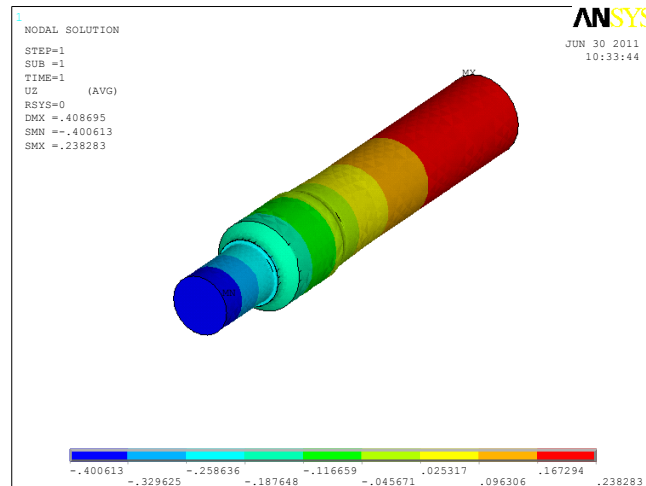


Figura 175. Desplazamientos en el eje vertical del eje.

8.3.2 Análisis de tensiones.

8.3.2.1 Análisis de tensiones en la rueda.

En la figura 176 se muestra la distribución de tensiones sobre la rueda, exceptuando las tensiones en la zona de apoyo de la misma sobre el raíl, que se comentarán posteriormente. Puede verse que en toda la rueda las tensiones tienen una distribución incremental uniforme, aumentando el valor de las mismas en la mitad inferior de la rueda, donde se soporta la carga y donde se llega a alcanzar un valor de **37MPa** en la zona que estaría alineada verticalmente con el eje.

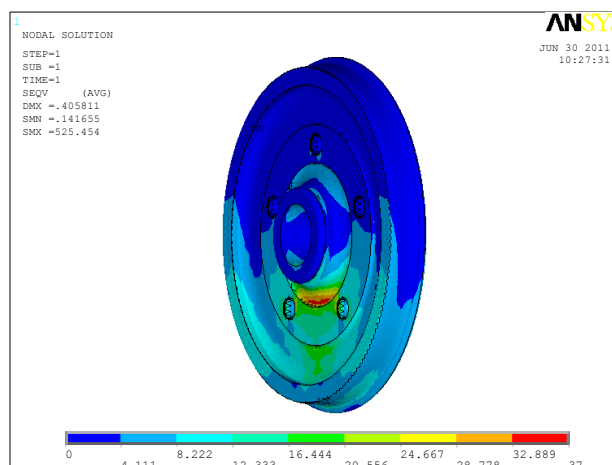


Figura 176. Distribución de tensiones en la rueda.

Como se ha mencionado anteriormente, es de interés profundizar en la distribución tensional que aparece en la zona donde la rueda apoya sobre el raíl. En dicho sector, se produce la transferencia de carga desde la rueda al raíl a través de una superficie de pequeño tamaño. Esto, a priori, hace pensar que las tensiones alcanzarán altos valores, lo que se confirma una vez realizado el análisis, alcanzándose valores de alrededor de **525 MPa** (figura 177).

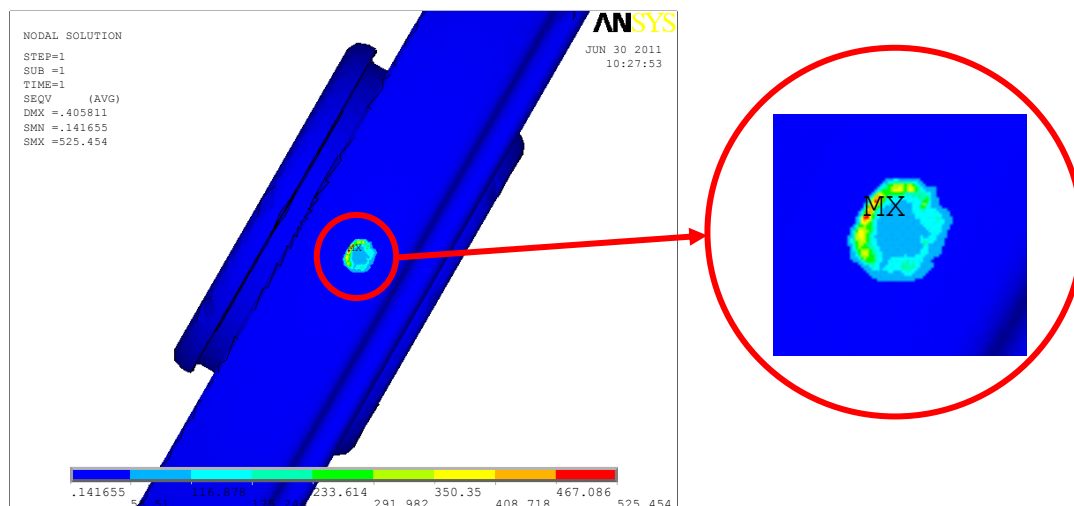


Figura 177. Distribución tensional en la rueda en la zona de apoyo de la rueda sobre el raíl.

8.3.2.2 Análisis de tensiones en el raíl.

Al igual que ocurriría en el análisis de la rueda, si no se considerara la zona de unión de la misma con el raíl, puede observarse (figura 178) que las tensiones sobre éste último se incrementan hasta alcanzar un valor de **70 MPa** en las zonas de transmisión de la carga en las que hay un menor espesor de material, siendo prácticamente despreciables en el resto del perfil.

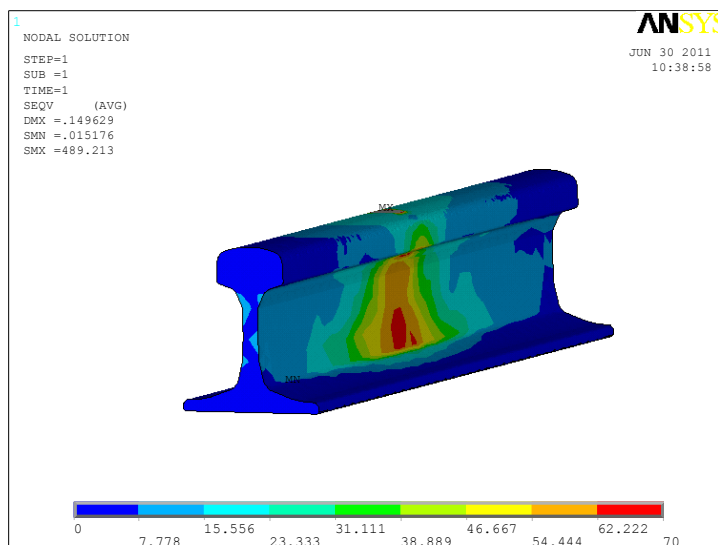


Figura 178. Distribución tensional en el raíl.

No obstante, analizando el punto de apoyo de la rueda sobre el raíl, por los mismos motivos que explican la alta concentración de tensiones sobre la rueda en dicha zona (figura 179), aparecen tensiones sobre el raíl de hasta **489 MPa**.

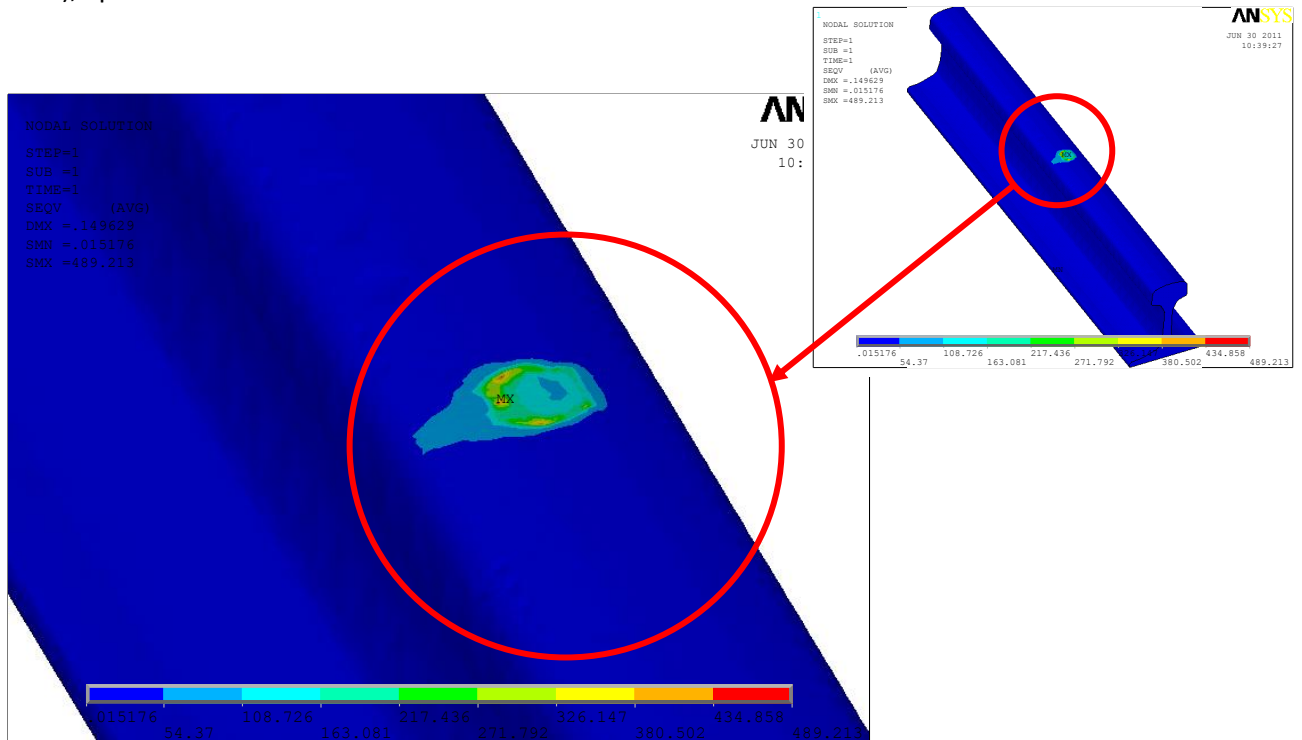


Figura 179. Distribución tensional en el raíl en la zona de apoyo de la rueda sobre el raíl.

8.3.2.3 Análisis de tensiones en el eje.

En la figura 180 se observa la distribución tensional existente sobre el eje. Se trata de una distribución de tensiones muy uniforme donde únicamente cabe destacar los altos valores (de hasta **84 MPa**) que se obtienen en las zonas donde existen concentradores de tensiones, es decir, aquellas donde existen variaciones de la sección del eje.

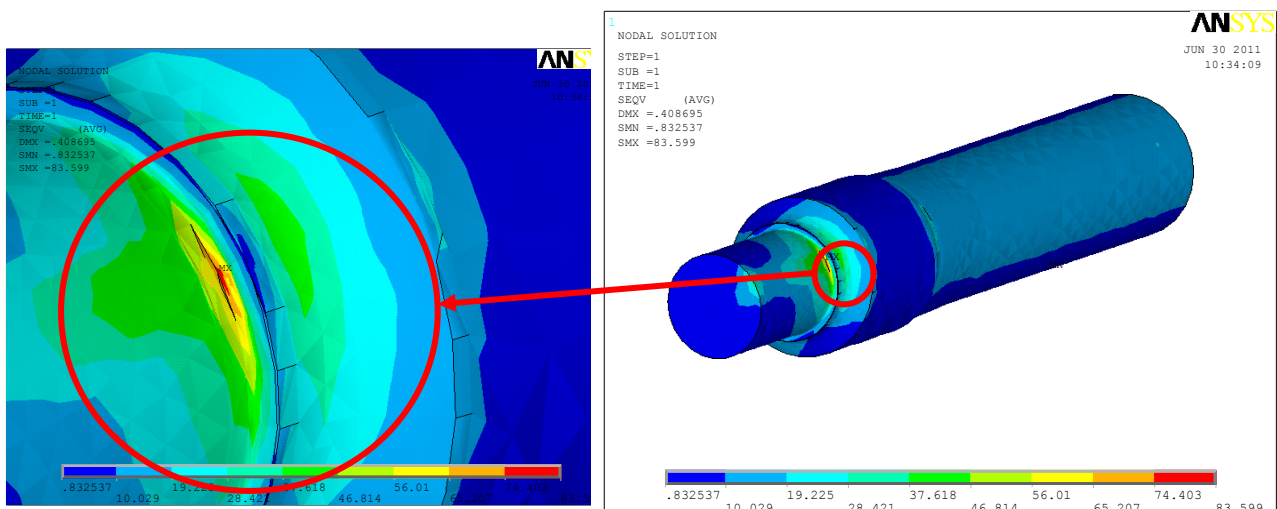


Figura 180. Distribución tensional sobre el eje.

8.4 Resumen de resultados.

En la tabla 5 se recoge un resumen de todos los resultados obtenidos en este estudio.

Tabla 5. Resumen de resultados del estudio de tensiones y deformaciones sobre el conjunto eje-raíl-rueda cuando se aplica la carga máxima de 25t.

	RUEDA	
	Valor	Zona de aparición
Máximo desplazamiento horizontal dcha.(mm)	0.17	Mitad inferior
Máximo desplazamiento horizontal izq. (mm)	0.402	Mitad superior
Máximo desplazamiento vertical hacia arriba (mm)	0	-----
Máximo desplazamiento vertical hacia abajo (mm)	0.154	Unión con eje
Máximo desplazamiento en profundidad hacia delante (mm)	0.003	Mitad inferior
Máximo desplazamiento en profundidad hacia atrás (mm)	0.32	Mitad superior
Tensión máxima alcanzada (MPa)	37	Mitad inferior, bajo eje
Tensión máxima alcanzada en zona de contacto con raíl(MPa)	525	Zona de contacto con raíl
	RAÍL	
	Valor	Zona de aparición
Máximo desplazamiento horizontal dcha.(mm)	0.143	Apoyo de la rueda
Máximo desplazamiento horizontal izq. (mm)	0	-----
Máximo desplazamiento vertical hacia arriba (mm)	0.029	Cara exterior del perfil
Máximo desplazamiento vertical hacia abajo (mm)	0.075	Cara interior del perfil
Máximo desplazamiento en profundidad hacia delante (mm)	0.011	Delante del punto de apoyo de la rueda
Máximo desplazamiento en profundidad hacia atrás (mm)	0.011	Detrás del punto de apoyo de la rueda
Tensión máxima alcanzada (MPa)	70	Alma del perfil
Tensión máxima alcanzada en zona de contacto con rueda(MPa)	489	Zona de contacto con rueda
	EJE	
	Valor	Zona de aparición
Máximo desplazamiento horizontal dcha.(mm)	0.075	Aplicación de carga
Máximo desplazamiento horizontal izq. (mm)	0.083	Aplicación de carga
Máximo desplazamiento vertical hacia arriba (mm)	0.238	Sección media del eje
Máximo desplazamiento vertical hacia abajo (mm)	0.402	Aplicación de carga
Máximo desplazamiento en profundidad hacia delante (mm)	0	-----
Máximo desplazamiento en profundidad hacia atrás (mm)	0.018	Parte superior del eje
Tensión máxima alcanzada (MPa)	84	Cambio de sección

Por último, a continuación se acompañan las imágenes de la distribución de tensiones (figura 181) en todo el conjunto analizado y de los desplazamientos totales (figura 182), en el eje vertical (figura 183), horizontal (figura 184) y en profundidad (figura 185).

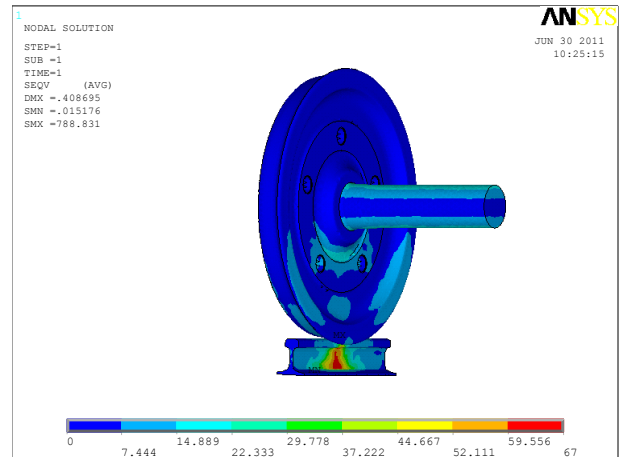
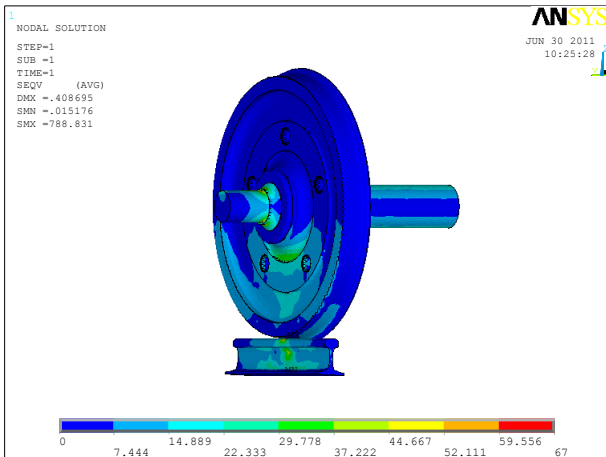


Figura 181. Distribución de tensiones en el conjunto en la cara exterior (izq.) e interior (dcha.).

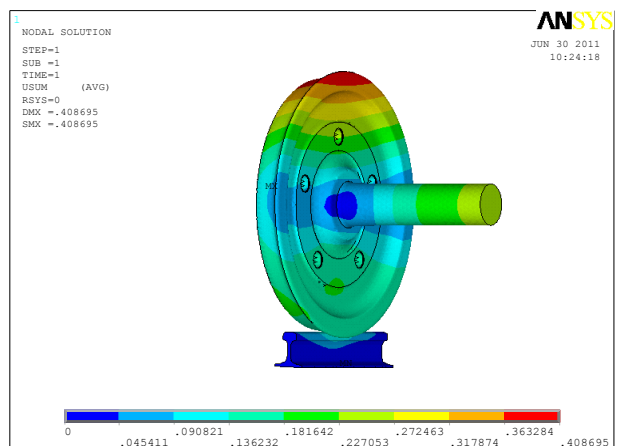
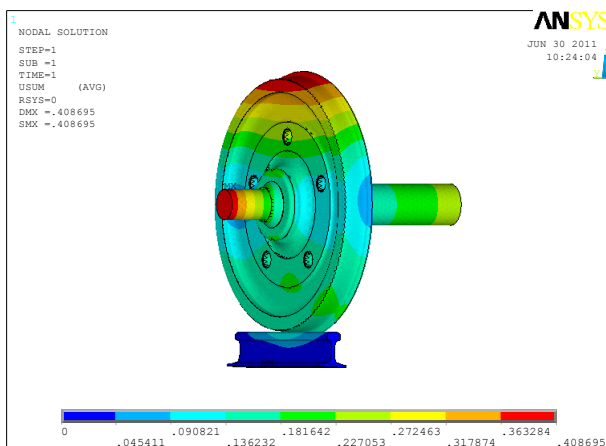


Figura 182. Vector desplazamientos en el conjunto en la cara exterior (izq.) e interior (dcha.).

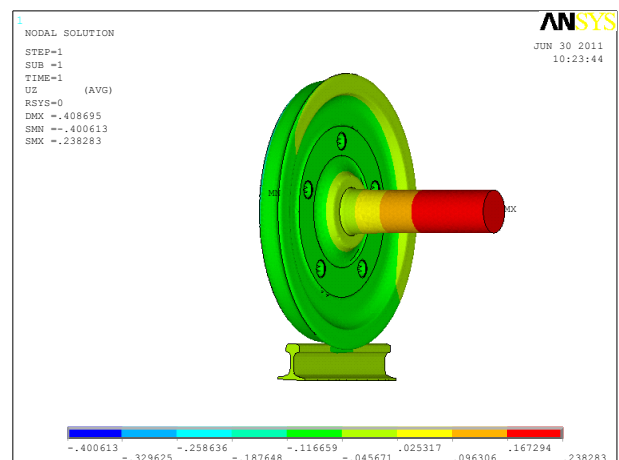
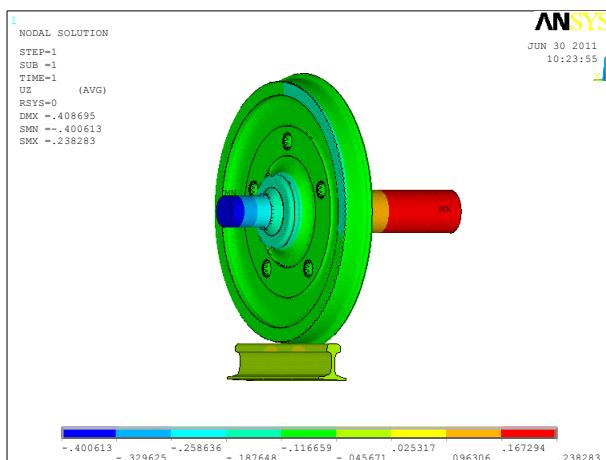


Figura 183. Desplazamientos en eje vertical en el conjunto en la cara exterior (izq.) e interior (dcha.).

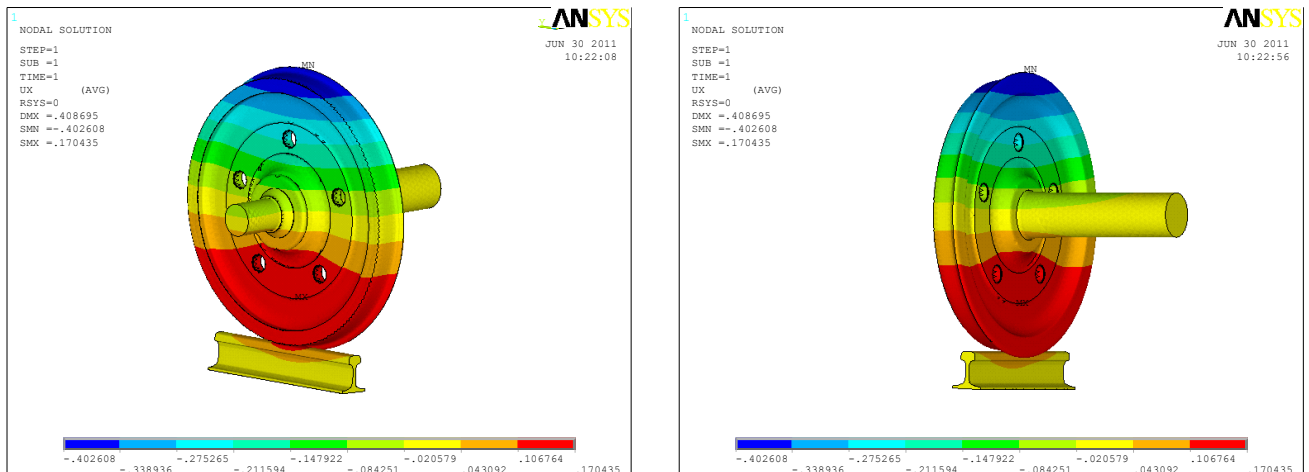


Figura 184. Desplazamientos en eje horizontal en el conjunto en la cara exterior (izq.) e interior (dcha.).

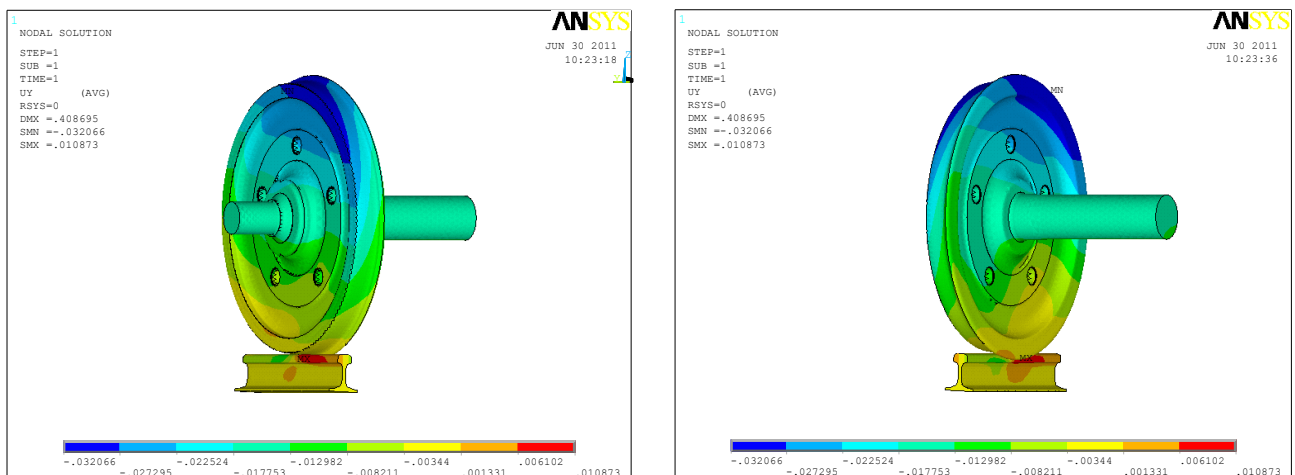


Figura 185. Desplazamientos en profundidad en el conjunto en la cara exterior (izq.) e interior (dcha.).

8.5 Conclusiones del análisis.

Valorando los resultados, se obtiene que los desplazamientos máximos que se producen sobre el eje tienen un valor de **0.238 mm** en su sección media y de **0.4 mm** en la zona de distribución de la carga.

Comparando estos valores con la longitud total del eje (2470 mm), se obtiene que los cocientes $\frac{\delta}{L}$ (siendo δ el valor de la flecha en cada caso y L la longitud del eje) toman un valor de **0.000096** en la sección media del eje y de **0.000163** en la zona de aplicación de carga, valores lo suficientemente pequeños como para considerarlos tolerables.

Por otro lado, considerando las tensiones resultantes en cada análisis, se comprueba que en ningún caso se supera la resistencia mínima en estado bonificado (**650 MPa**), hallándose un valor tensional máximo de **84 MPa** sobre el eje y de **525 MPa** en el resto del modelo, debiéndose tener en cuenta que este último valor se produce en la zona de apoyo de la rueda sobre el eje, por lo que era previsible que, al estar transfiriéndose toda la carga aplicada sobre el eje en una superficie de tamaño reducido, la tensión en dicha zona tuviera un valor elevado.

Además, experimentalmente, esto se ve refrendado por el desgaste que se produce durante el funcionamiento del ferrocarril en la zona de apoyo de la rueda sobre el raíl, lo que de nuevo lleva a pensar que (considerando que el desgaste sea de carácter adhesivo puesto que los materiales en contacto son prácticamente iguales) deben existir unos valores de tensión elevados que provoquen la adhesión de los materiales, según la teoría de **F.P. BOWDEN y D. TABOR**.

En cuanto a la tensión máxima existente sobre el eje, teniendo en cuenta que está constituido por acero F222 (también denominado 25CrMo4 o EA4T en el ámbito ferroviario), se extrae de la norma UNE-EN 13103:2010+A1 la tabla 6, en la que se indican los valores de tensión admisibles en diferentes zonas del eje, observándose que en ningún caso se superan los máximos permitidos

Tabla 6. Esfuerzos máximos permitidos para ejes macizos para calidad de acero EA4T (Fuente: norma UNE-EN 13103:2010+A1).

Coefficiente de seguridad S	Zona 1 ^a N/mm ²	Zona 2 ^b N/mm ²
1,33	180	110
^a Zona 1: cuerpo del eje, zonas de calado de rodamiento y curvas de transición. ^b Zona 2: zonas de calado de rueda, de disco de freno, de rodamiento y de obturador.		

Por tanto, se concluye que el modelo, en cuanto a esfuerzos se refiere, soportará las cargas estáticamente determinadas y que los desplazamientos existentes no afectarán de manera decisiva al comportamiento del sistema mecánico.

8.6 Análisis modal del eje ferroviario.

El análisis modal del eje ferroviario consiste en determinar sus modos propios de vibración. A pesar de que no es un estudio de tensiones o desplazamientos sobre el eje como tal, se trata en este capítulo por considerarse que es una investigación fundamental que debe ser incluida entre las primeras realizadas. En las siguientes tablas (de la 7 a la 11) se listan las veinte primeras frecuencias naturales del eje ferroviario libre en el espacio obtenidas mediante ANSYS. En dichas tablas también se adjuntan las imágenes de las deformadas que se producirían si se excitase el eje ferroviario con cargas de frecuencias correspondientes a las propias de vibración indicadas en la misma. En el anexo B se muestran las deformadas mencionadas de manera más clara y en mayor tamaño que el aquí dispuesto.

Tabla 7. Modos propios de vibración del eje ferroviario (Del 1 al 4).

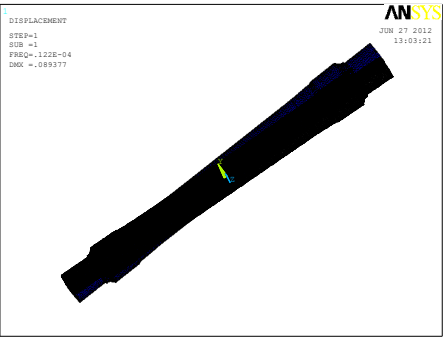
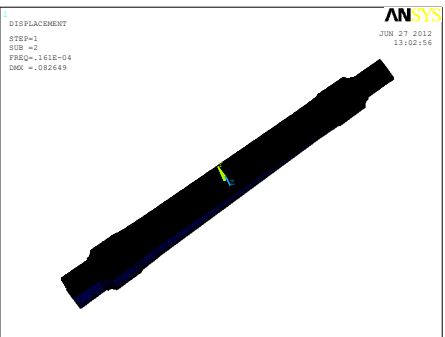
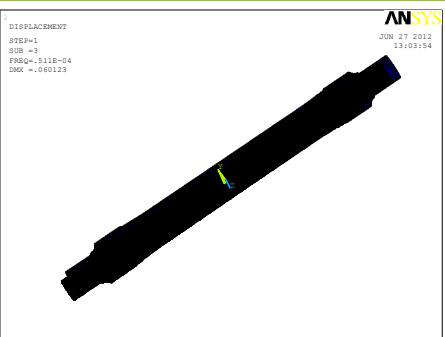
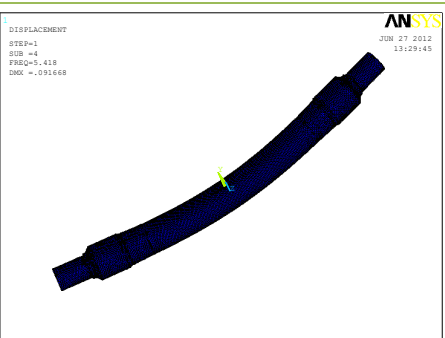
Nº de modo propio	Frecuencia (Hz)	Tipo de modo propio de vibración	Desplazamiento máximo (mm)	Deformada
1	1,22E-05	Movimiento libre en el espacio	0,089377	 <p>DISPLACEMENT STEP=1 SUB =1 FREQ= 1,22E-04 DMX =,089377</p>
2	1,61E-05	Movimiento libre en el espacio	0,082649	 <p>DISPLACEMENT STEP=1 SUB =2 FREQ= 1,61E-04 DMX =,082649</p>
3	5,11E-05	Movimiento libre en el espacio	0,060123	 <p>DISPLACEMENT STEP=1 SUB =3 FREQ= 5,11E-04 DMX =,060123</p>
4	5,41841	Flexión simple (eje Y)	0,091668	 <p>DISPLACEMENT STEP=1 SUB =4 FREQ= 5,418 DMX =,091668</p>

Tabla 8. Modos propios de vibración del eje ferroviario (Del 5 al 8).

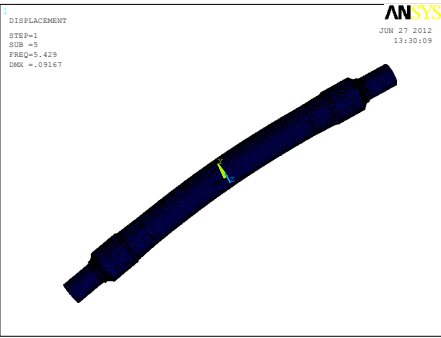
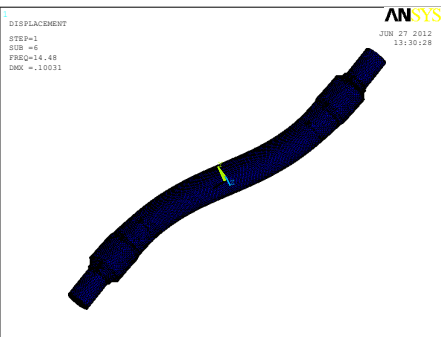
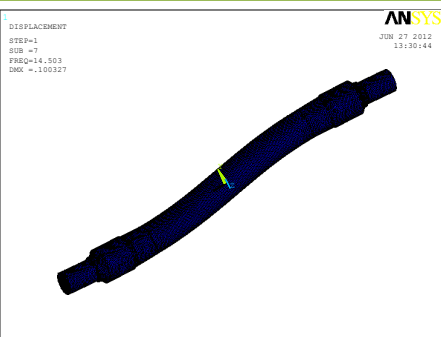
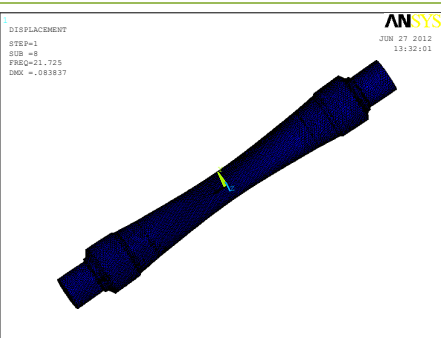
Nº de modo propio	Frecuencia (Hz)	Tipo de modo propio de vibración	Desplazamiento máximo (mm)	Deformada
5	5,42935	Flexión simple (eje Z)	0,09167	
6	14,4798	Flexión múltiple I (eje Y)	0,10031	
7	14,5033	Flexión múltiple I (eje Z)	0,100327	
8	21,725	Expansión-contracción	0,083837	

Tabla 9. Modos propios de vibración del eje ferroviario (Del 9 al 12).

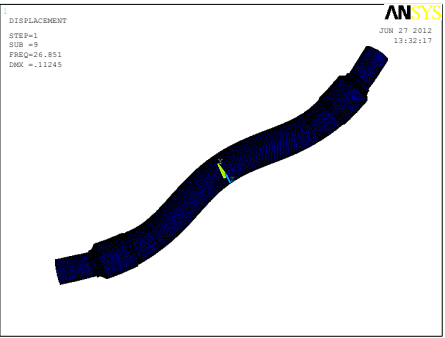
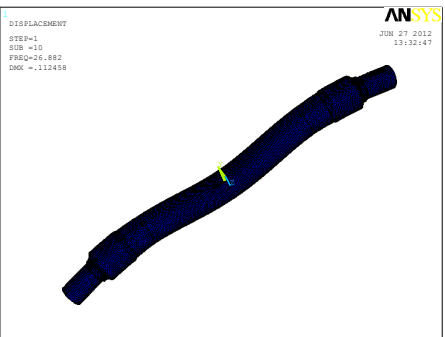
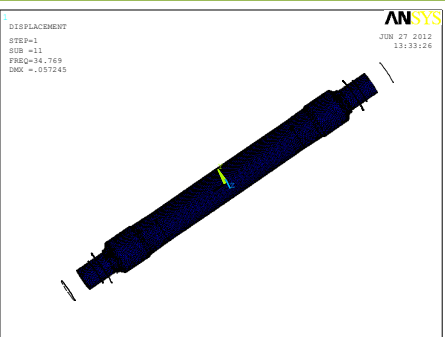
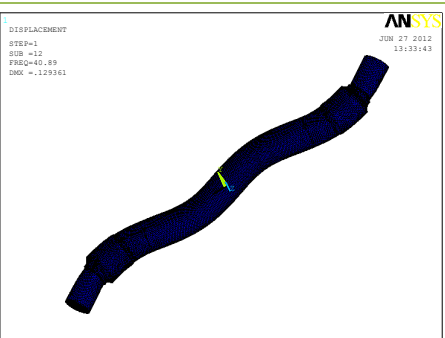
Nº de modo propio	Frecuencia (Hz)	Tipo de modo propio de vibración	Desplazamiento máximo (mm)	Deformada
9	26,8509	Flexión múltiple II (eje Y)	0,11245	
10	26,8821	Flexión múltiple II (eje Z)	0,112458	
11	34,7691	Extensión-compresión	0,057245	
12	40,8904	Flexión múltiple III (eje Y)	0,129361	

Tabla 10. Modos propios de vibración del eje ferroviario (Del 13 al 16).

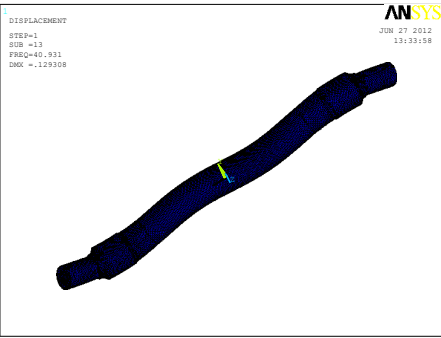
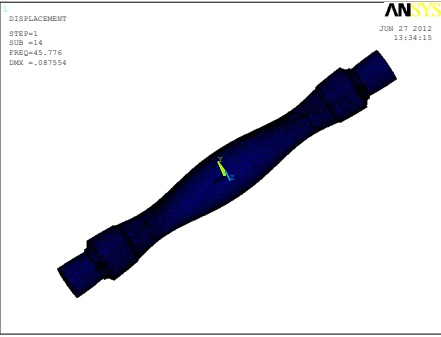
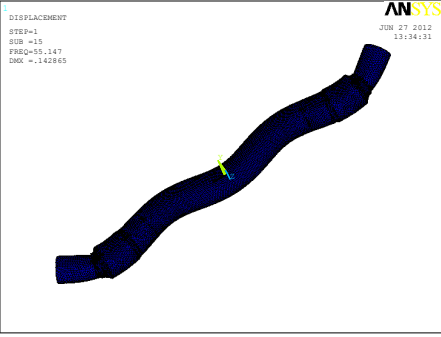
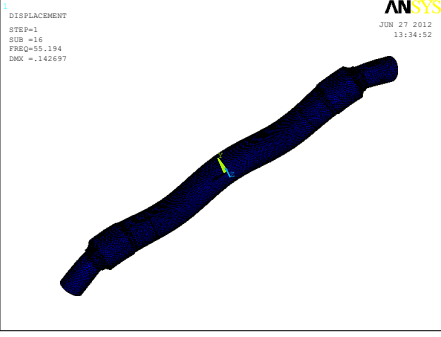
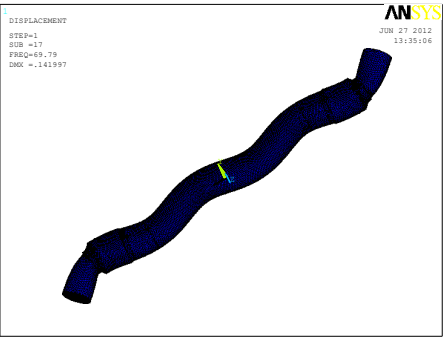
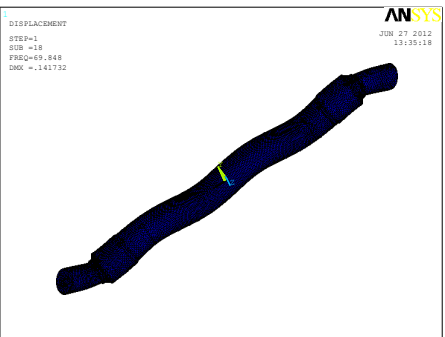
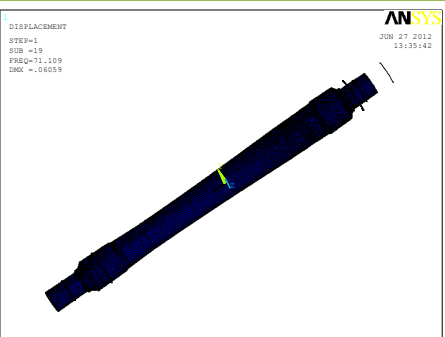
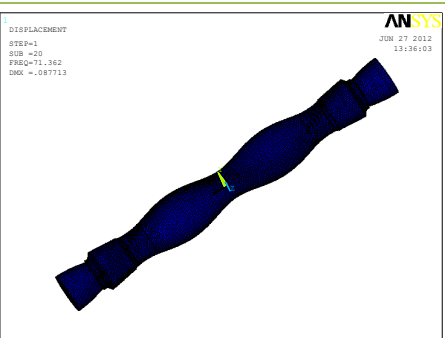
Nº de modo propio	Frecuencia (Hz)	Tipo de modo propio de vibración	Desplazamiento máximo (mm)	Deformada
13	40,9314	Flexión múltiple III (eje Z)	0,129308	
14	45,7763	Expansión-contracción II	0,087554	
15	55,1466	Flexión múltiple IV (eje Y)	0,142855	
16	55,1935	Flexión múltiple IV (eje Z)	0,142697	

Tabla 11. Modos propios de vibración del eje ferroviario (Del 17 al 20).

Nº de modo propio	Frecuencia (Hz)	Tipo de modo propio de vibración	Desplazamiento máximo (mm)	Deformada
17	69,7897	Flexión múltiple V (eje Y)	0,141997	
18	69,8481	Flexión múltiple V (eje Z)	0,141732	
19	71,1087	Extensión-compresión II	0,06059	
20	71,3617	Expansión-contracción III	0,087713	

Capítulo 9

Estudio a fatiga de un eje ferroviario.

9.1 Estudio a analítico de un eje a fatiga.

9.1.1 Obtención de los esfuerzos en el eje.

Para la determinación de los esfuerzos sobre el eje ferroviario de interés (el mismo que el analizado en el capítulo 8) se recuerda que, debido a la simetría del mismo, se considerará únicamente la mitad de éste. Así, se anula el desplazamiento horizontal en la sección cortada por el eje de simetría (aplicación de las condiciones de contorno a un conjunto simétrico cuando se divide por la mitad) y se anulan los desplazamientos en la base del raíl. Como se indicó en la metodología, se aplica una carga de 125 kN (25t) uniformemente repartida en la zona del eje que estaría soportando el vagón (lo que nos indica que, si se estuviera analizando el eje completo, éste estaría soportando una carga de 250 kN). Asimismo, según se señaló anteriormente, el material utilizado es acero F222 (también denominado 25CrMo4 o EA4T en el ámbito ferroviario) con:

- $S_y = 650 \text{ MPa}$
- $S_u = 850 \text{ MPa}$

De esta forma, mediante la aplicación informática ED-TRIDIM de cálculo matricial de estructuras, se obtiene el diagrama de esfuerzos mostrado en la figura 186, donde el pilar vertical representa el conjunto rueda-raíl.

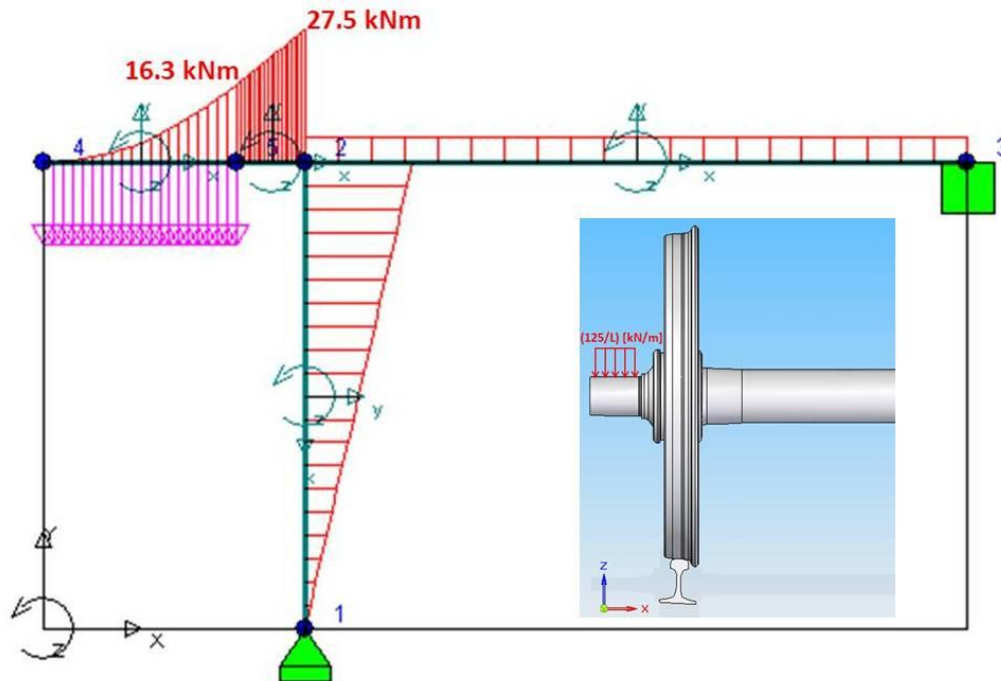


Figura 186. Esfuerzos sobre el eje ferroviario.

En la figura 186 se observa que el momento flector existente en el cambio de diámetro desde la zona del eje de apoyo de la caja de grasa ($\phi 150mm$) hasta la zona de calaje ($\phi 230mm$) con un radio de acuerdo de $25mm$ (ver figura 187) es de $16.3\ kNm$, mientras que el momento flector máximo en la sección de calaje es de $27.5\ kNm$. Parece evidente que una de estas dos secciones será la crítica del conjunto.

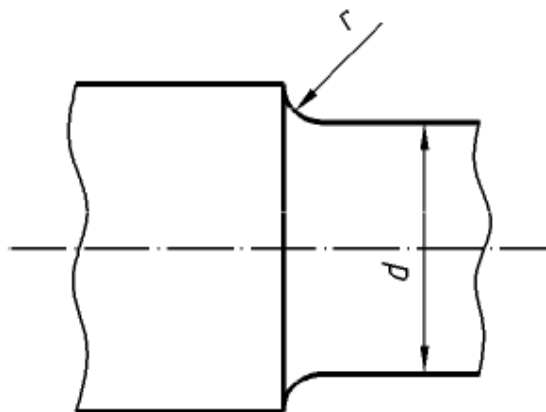


Figura 187. Sección de paso de la zona de apoyo de la caja de grasa a la zona de calaje de un eje ferroviario.

9.1.2 Análisis de las secciones críticas.

Para comenzar el análisis de las secciones que se ha considerado que pueden ser críticas, se define el valor del límite a fatiga para vida infinita sin corregir a partir de lo visto en apartados anteriores:

$$S'_e = 0.5 \cdot S_{ut} = 0.5 \cdot S_u = 425 \text{ MPa}$$

Para dicho análisis se utilizará el criterio de Goodman y la teoría E.C.M. para vida infinita, considerándose un coeficiente de seguridad de $n = 1,33$ dado por la norma UNE-EN 13103:2010+A1 para el cálculo de ejes ferroviarios.

De la misma forma, para obtener el valor del factor de concentración de tensiones se utilizarán las gráficas que ofrece la norma antes mencionada (UNE-EN 13103:2010+A1) en lugar de las presentadas en el capítulo 5 del presente proyecto.

Así, se considerará como sección 1 a la correspondiente a la zona de calaje del eje (donde el factor de concentración de tensiones será igual a la unidad, puesto que no existe ninguna discontinuidad que actúe como concentradora de tensiones) y como sección 2 a la referida al cambio de diámetro desde la zona de apoyo de la caja de grasa hasta la zona de calaje del eje. En esta segunda sección, según la norma ya mencionada, deberán ser considerados dos factores de concentración de tensiones independientes (de entre los que se seleccionará el más crítico):

- El correspondiente a la transición inferior entre dos partes cilíndricas contiguas de diámetros diferentes (figura 188).
- El correspondiente a la parte más profunda (el fondo) de la acanaladura. (figura 189).

A continuación se lleva a cabo el análisis de las secciones especificadas:

- **Sección 1: Zona de calaje, $d = 230 \text{ mm}$**

$$\left\{ \begin{array}{l} M = 27500 \text{ N} \\ T = 0 \\ K_a = a \cdot S_u^b = 272 \cdot 850^{-0,995} = 0,331 \\ K_b = 1.189 \cdot 230^{-0,097} = 0,7016 \\ K_c = 0.814 \\ K_d = 1 \\ K_e = 1 \\ K_f = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow S_e = 80,33 \text{ MPa} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \geq \left[\frac{32 \cdot 1,33}{\pi} \left(\left(\frac{27500}{80,33 \cdot 10^6} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} = 0,1667 \text{ m}$$

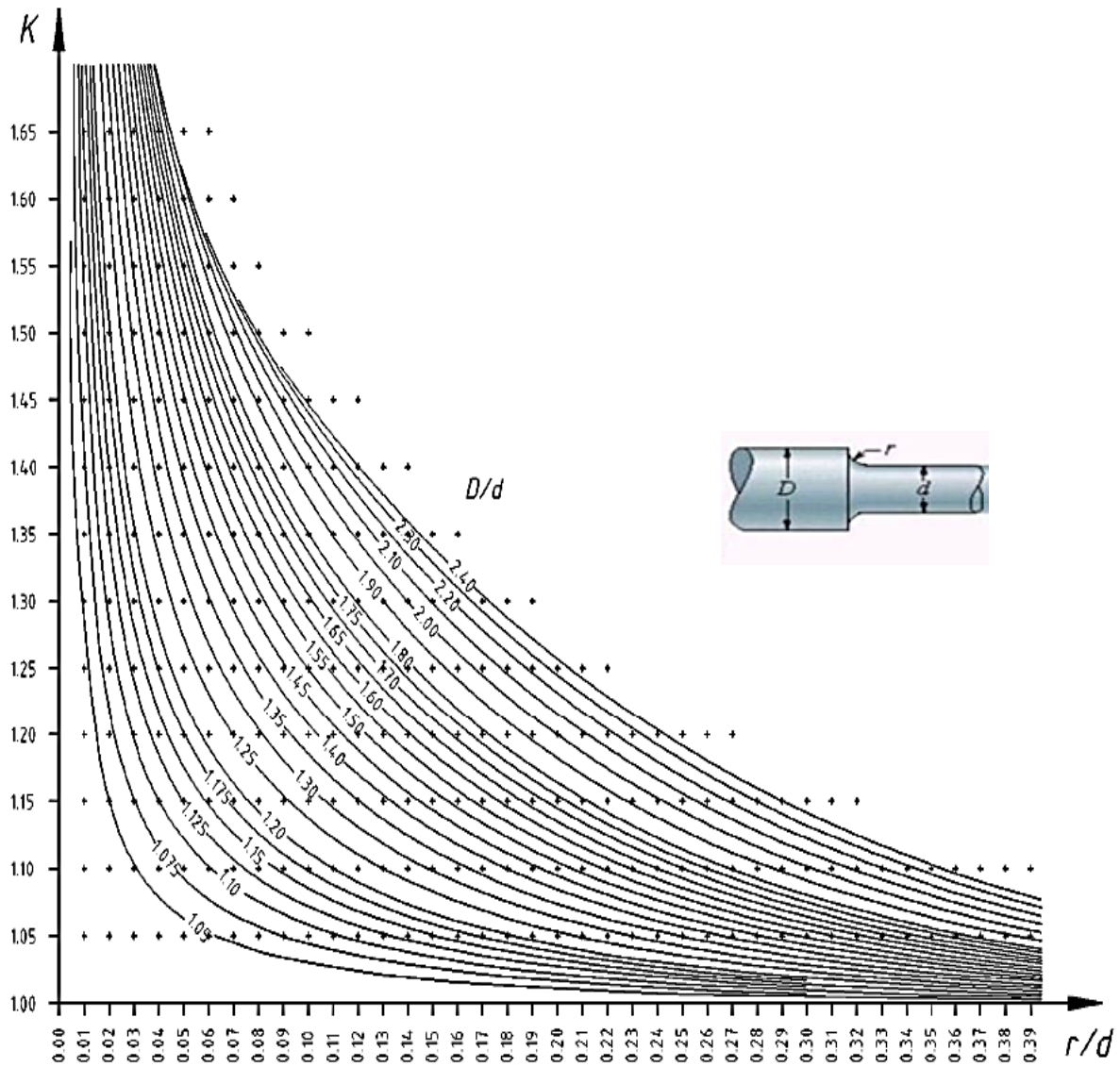


Figura 188. Coeficiente de concentración de esfuerzos en función de D/d y r/d en la transición inferior entre dos partes cilíndricas (Fuente: norma UNE-EN 13103:2010+A1).

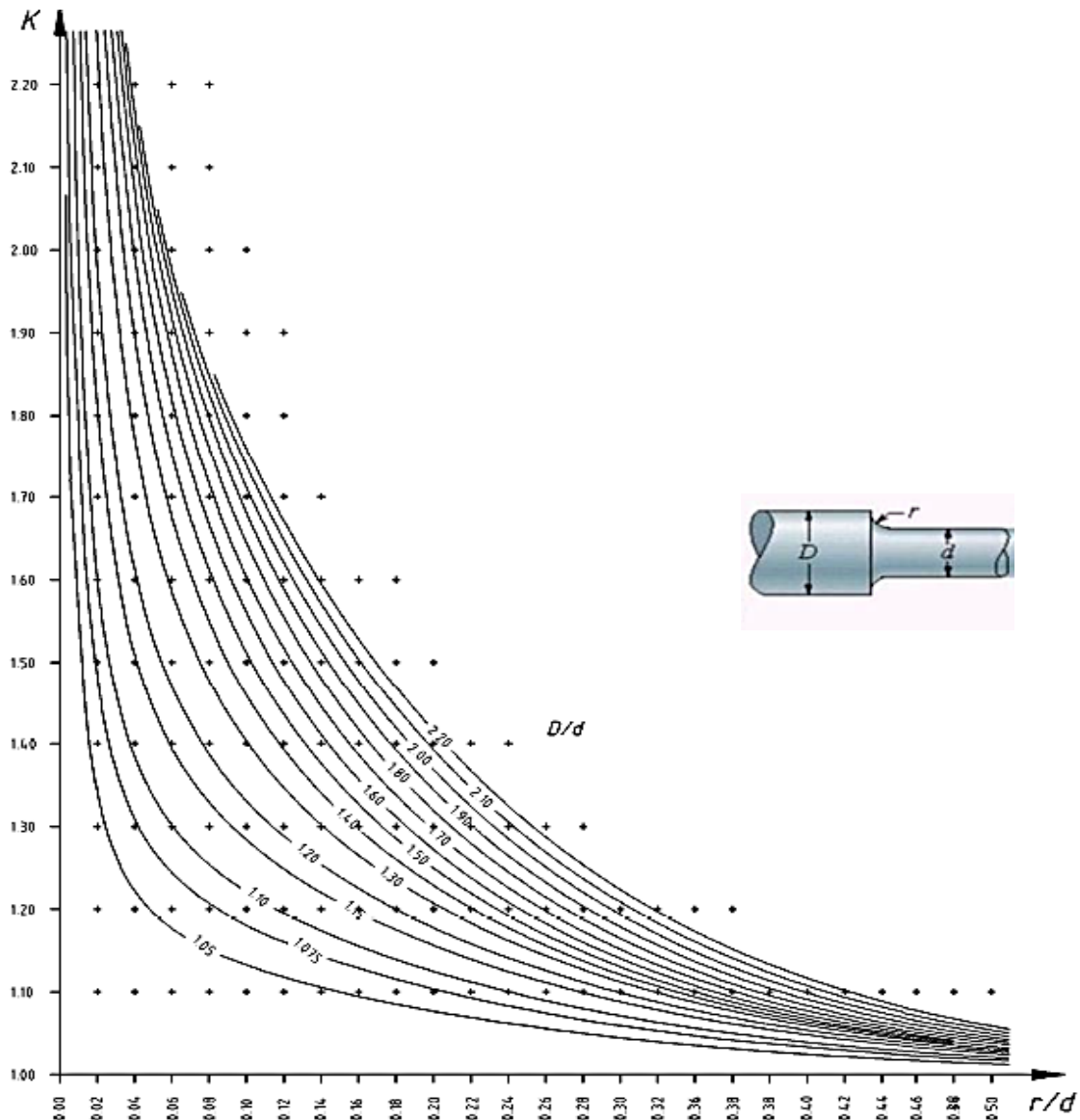


Figura 189. Coeficiente de concentración de esfuerzos en función de D/d y r/d en el fondo de la acañaladura (Fuente: norma UNE-EN 13103:2010+A1).

- **Sección 2: Cambio de diámetro desde la zona de apoyo de la caja de grasa hasta la zona de calaje, $d = 150 \text{ mm}$, $D = 230 \text{ mm}$, $r = 25 \text{ mm}$.**

$$\left\{ \begin{array}{l} M = 16300 \text{ N} \\ T = 0 \\ K_a = a \cdot S_u^b = 272 \cdot 850^{-0,995} = 0,331 \\ K_b = 1.189 \cdot 230^{-0,097} = 0,7016 \\ K_c = 0.814 \\ K_d = 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} D/d = 1,53 \\ r/d = 0,1067 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_{transición} = 1,23 \\ K_{acanaladura} = 1,45 \end{array} \right\} \Rightarrow K_e = \frac{1}{K_{acanaladura}} = 0,6896 \\ K_f = 1 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_e = 55,39 \text{ MPa} \Rightarrow d \geq \left[\frac{32 \cdot 1,33}{\pi} \left(\left(\frac{16300}{55,39 \cdot 10^6} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} = 0,158 \text{ m}$$

Como se observa en los resultados obtenidos, la sección 1, debido a que el diámetro de la misma es superior al mínimo que se ha obtenido, tendrá vida infinita a fatiga. Sin embargo, en la sección 2 no ocurre esto. Por tanto, se comprueba que esta última sección es la crítica del eje y, como no posee vida infinita, se procede a calcular su vida a fatiga, que será la del eje.

Para ello, utilizando la ecuación correspondiente al criterio de Goodman y a la teoría E.C.M se obtiene el valor de S_f .

$$d = \left[\frac{32 \cdot n}{\pi} \left(\left(\frac{T}{S_u} \right)^2 + \left(\frac{M}{S_f} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} \Rightarrow S_f = \frac{M}{\sqrt{\left(\frac{d^3 \cdot \pi}{32 \cdot n} \right)^2 - \left(\frac{T}{S_u} \right)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_f = \frac{16300}{\sqrt{\left(\frac{0,150^3 \cdot \pi}{32 \cdot 1,33} \right)^2}} = 65,43 \text{ MPa}$$

Conociendo el valor de la tensión a la que se produce el fallo a fatiga, debe utilizarse el diagrama de fatiga de Goodman para obtener el número de ciclos a los que se producirá dicho fallo, sabiendo que el punto $(\log N_{fallo}, \log S_f)$ correspondiente al mismo se encuentra en la recta definida por los puntos $(\log 10^3, \log(0,9 \cdot S_u))$ y $(\log 10^6, \log S_e)$. Se obtiene la ecuación de dicha recta:

$$\begin{cases} \log(0,9 \cdot S_u) = a \cdot \log 10^3 + b \\ \log S_e = a \cdot \log 10^6 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log(765) = a \cdot \log 10^3 + b \\ \log(65,43) = a \cdot \log 10^6 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2,883 = a \cdot 3 + b \\ 1,815 = a \cdot 6 + b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -0,356 \\ b = 3,951 \end{cases} \Rightarrow \log S = 3,951 - 0,356 \log N \Rightarrow N = 10^{\frac{\log S - 3,951}{-0,356}}$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta obtenida, se obtiene la vida a fatiga del eje ferroviario estudiado con un coeficiente de seguridad de 1,33 y una confiabilidad del 98%:

$$N = 10^{\frac{\log S_f - 3,951}{-0,356}} = 10^{\frac{\log 65,43 - 3,951}{-0,356}} = 994987,534 \text{ ciclos}$$

Finalmente, conociendo el radio de la rueda del ferrocarril ($0,625m$) y considerando cada ciclo como un giro del eje, se podría obtener, aproximadamente, el número de kilómetros que el vehículo ferroviario recorrería antes de que se produjera el fallo a fatiga de los ejes.

$$(994987,534 \text{ ciclos}) \cdot (2\pi \cdot 0,625)m/\text{ciclo} = 3907316,046 \text{ m} = 3907,316 \text{ km}$$

No obstante, tal y como se comentó, esto es una aproximación. Hay que considerar que, sin tener en cuenta el coeficiente de seguridad, probablemente, el eje se encontraría en régimen de vida a fatiga infinita. Por tanto, lo que habrá que realizar son revisiones periódicas para inspeccionar los ejes y detectar posibles fisuras.

9.2 Estudio del eje a fatiga mediante ANSYS.

ANSYS 10.0 dispone en su menú principal de un módulo que permite llevar a cabo estudios a fatiga (ver figura 190) a partir de los resultados obtenidos en un análisis estructural previo. El proceso que sigue la aplicación informática es similar al que se seguiría en un estudio analítico, pero evita la necesidad de llevar a cabo arduos cálculos. Para ello, se realiza el proceso que se expone en los siguientes apartados.

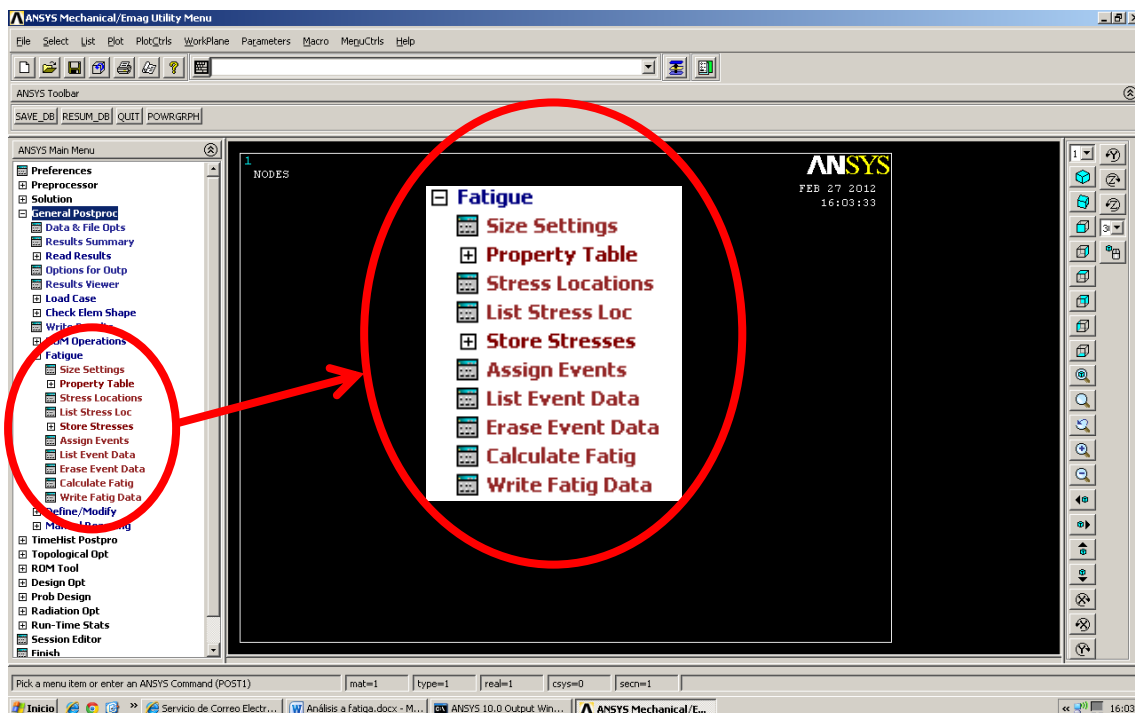


Figura 190. Módulo que permite llevar a cabo estudios a fatiga.

9.2.1 Determinación del tipo de análisis.

En el caso que se está estudiando, en vez de seleccionar un análisis estático o modal, tal y como se ha llevado a cabo en casos anteriores, se debe escoger el modo *transient* (ver figura 191), que permite aplicar cargas variables con el tiempo.

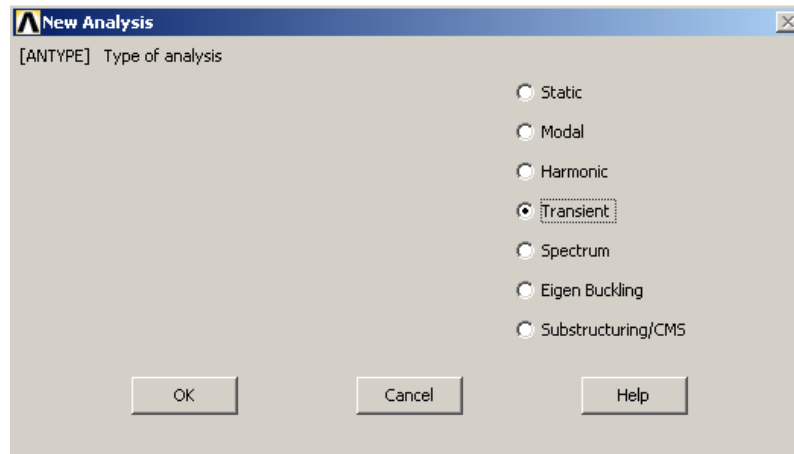


Figura 191. Selección de análisis tipo “transient”.

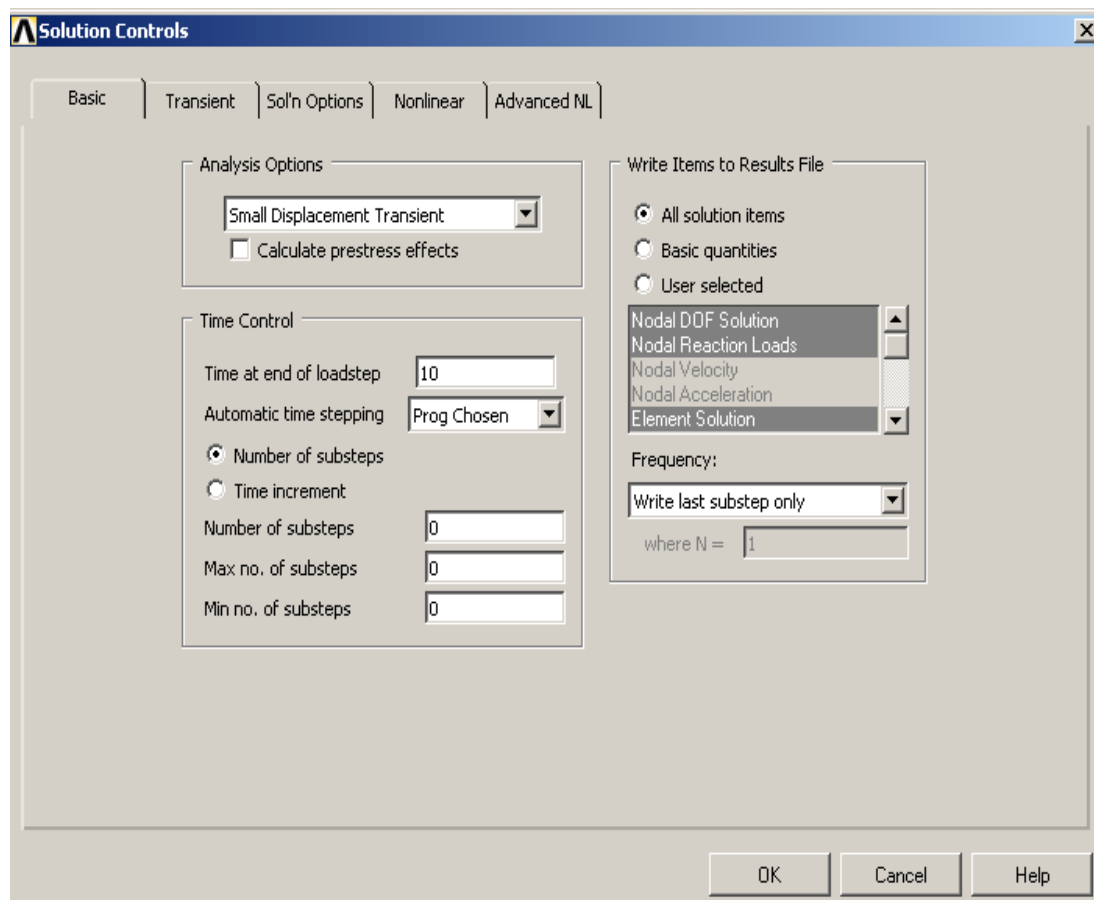


Figura 192. Pantalla “Solution controls, basic tab”.

Este tipo de análisis debe ser configurado a través de la pantalla del menú principal denominada *Solution controls*, que a su vez dispone de dos pestañas. En la primera de ellas (*basic tab*) se determina el tiempo final de cada paso de carga que, en este caso, sería el tiempo de duración de medio ciclo, algo que no es fundamental en el análisis, puesto que lo que interesa es el número de ciclos y no su duración. Por ello, se ha definido un tiempo de ciclo de 10s (ver figura 192), sin haber seguido ningún tipo de criterio esencial para el estudio.

La segunda de las pestañas (*transient tab*) define cómo se aplicarán las cargas. En este punto es conveniente definir cómo se simulará el sistema de carga alternante que, según se mencionaba en la metodología, se desea plantear. Se especificará una determinada carga constante que irá cambiando de signo de manera alternativa, lo que se asemejará a una determinada carga constante sobre un eje en el que, al estar girando, si nos situásemos sobre uno de sus puntos, los esfuerzos sobre dicho punto irían variando de manera lineal y alternativa a medida que avanza circunferencialmente.

De este modo, en la segunda pestaña anteriormente mencionada, se puede elegir que el paso entre cargas sea escalonado (*Stepped loading*) o lineal (*Ramped loading*). Éste último método será el que se utilizará (ver figura 193).

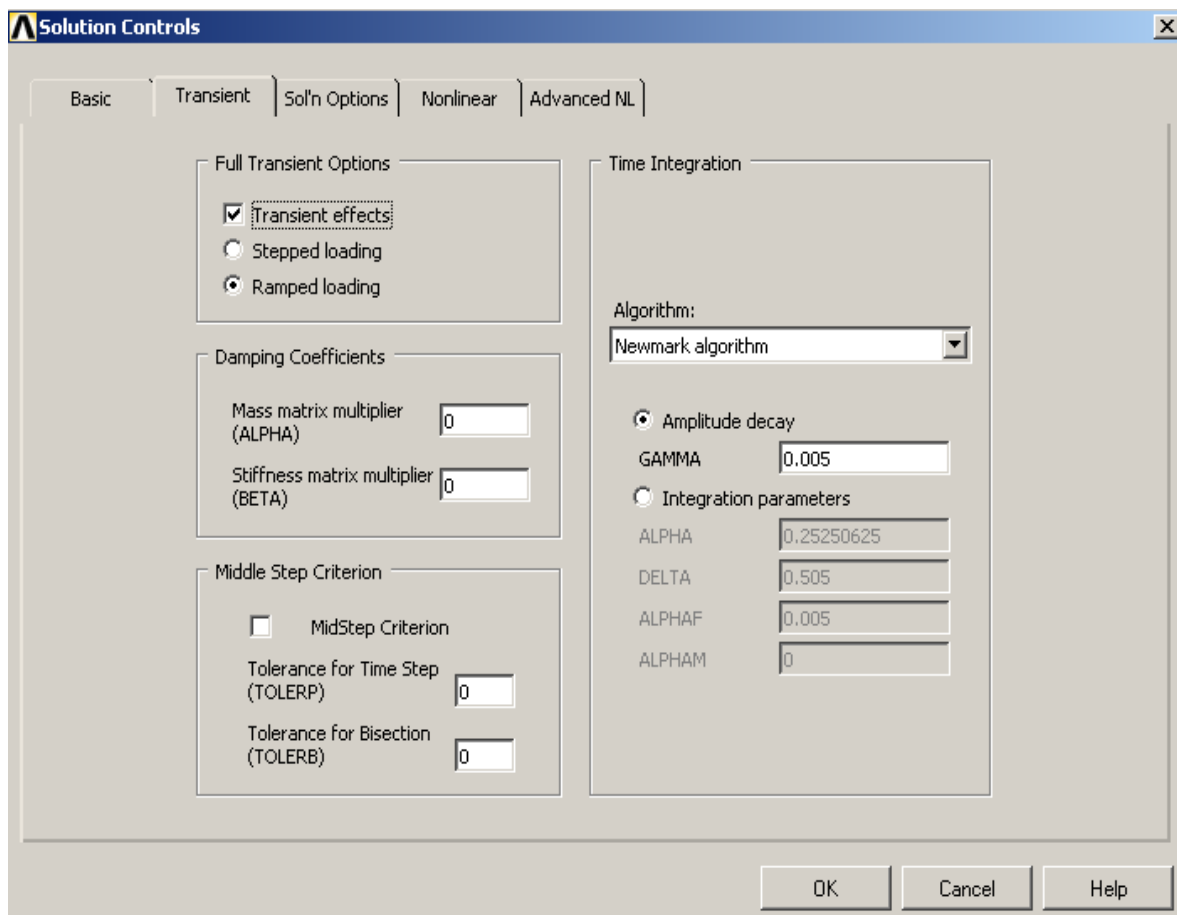


Figura 193. Pantalla "Solution controls, transient tab".

9.2.2 Aplicación de las cargas.

Para la definición de las cargas, se determinarán, dos estados de carga idénticos pero, de signos contrarios. Éstos definirán, conjuntamente, un único ciclo de carga que, para la simulación a fatiga, se repetirá el número de veces que se considere.

Al igual que se hizo para el estudio analítico del eje a fatiga, se considerará el coeficiente de seguridad dado por la norma UNE-EN 13103:2010+A1 de 1,33. De esta forma, las cargas nominales, para este análisis, serán multiplicadas por dicho coeficiente.

Para la especificación de los estados de carga, se procede, de manera independiente para cada uno de ellos, de la misma manera que se hacía en las simulaciones en modo estático anteriormente expuestas. Sin embargo, tras aplicar las sollicitaciones correspondientes a cada estado, éste debe salvarse como tal mediante el cuadro *Load Step Options* \Rightarrow *Write LS File* del menú principal (ver figura 194). En dicho cuadro, se especifica el número del estado de carga, lo que luego influirá en el orden en el que se aplica cada uno de ellos. Hay que tener en cuenta que, aunque en este estudio se apliquen sólo dos estados de carga, se podrían aplicar tantos como se desee.

Por otro lado, hay que tener en cuenta que, para completar la definición del ciclo, al establecer el segundo paso de carga, hay que variar el tiempo final del mismo en el cuadro *basic tab* visto en el apartado 9.2.1, pasando a ser, en este caso, 20s.

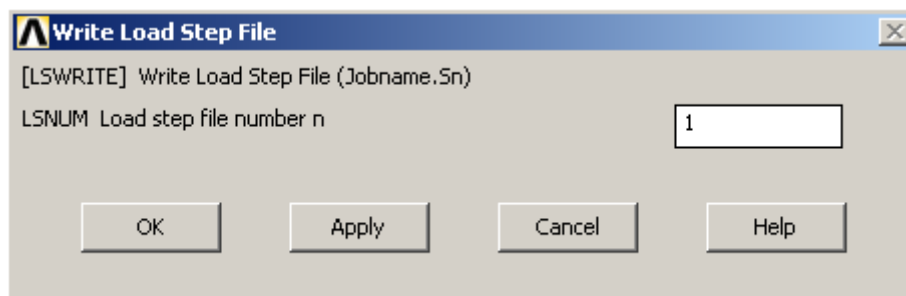


Figura 194. Cuadro "Load Step options, Write LS File".

9.2.3 Resolución del sistema y estudio a fatiga.

Tras la definición de los estados de carga debe resolverse el modelo sometido a una carga tipo *transient*. Al igual que en los apartados anteriores, esto no se realiza de la misma forma que en los análisis estáticos, sino que hay que seleccionar, en el menú principal la opción *Solve* \Rightarrow *From LS Files*, obteniéndose el cuadro representado en la figura 195, en el que se solicita resolver los estados de carga que se deseen, en este caso los estados de carga 1 y 2.

Resuelto el modelo de elementos finitos con los estados de carga asignados, se pasa a realizar el análisis a fatiga. Para ello, en el programa se debe definir, en primer lugar, la curva de fatiga de Goodman que se utilizará, determinando algunos de sus puntos clave a partir de la tabla 12.

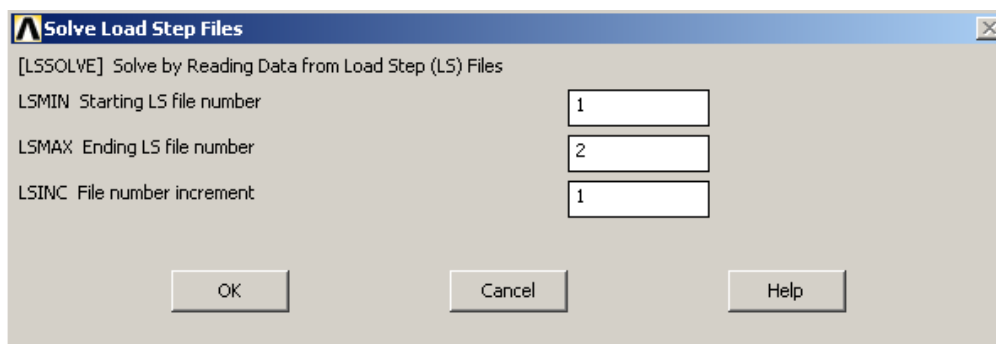


Figura 195. Cuadro "Solve Load Step Files".

Tabla 12. Límite a fatiga en función del número de ciclos.

Número de ciclos (N)	Límite a fatiga (S_f , MPa)
$< 10^3$	$0,9S_u$
De 10^3 a 10^6	$\frac{(0,9S_u)^2}{S_e} \cdot N^{-(1/3) \cdot \log(0,9S_u/S_e)}$
$> 10^6$	S_e

Se considerará que $S_e = K_a \cdot K_b \cdot K_c \cdot S'_e = 80,33 \text{ MPa}$, puesto que el factor de concentración de tensiones no es necesario ya que, mediante el MEF, se está calculando la tensión existente en cada nodo y no un valor aproximado a partir del diámetro de la sección.

Para definir dichos puntos clave en el programa se selecciona, en el menú principal, *General Postproc* \Rightarrow *Fatigue* \Rightarrow *Property Table* \Rightarrow *S-N Table*. Es posible especificar hasta veinte puntos clave de la curva de fatiga. En la figura 196 se muestran los puntos que se han determinado en el caso que se estudia.

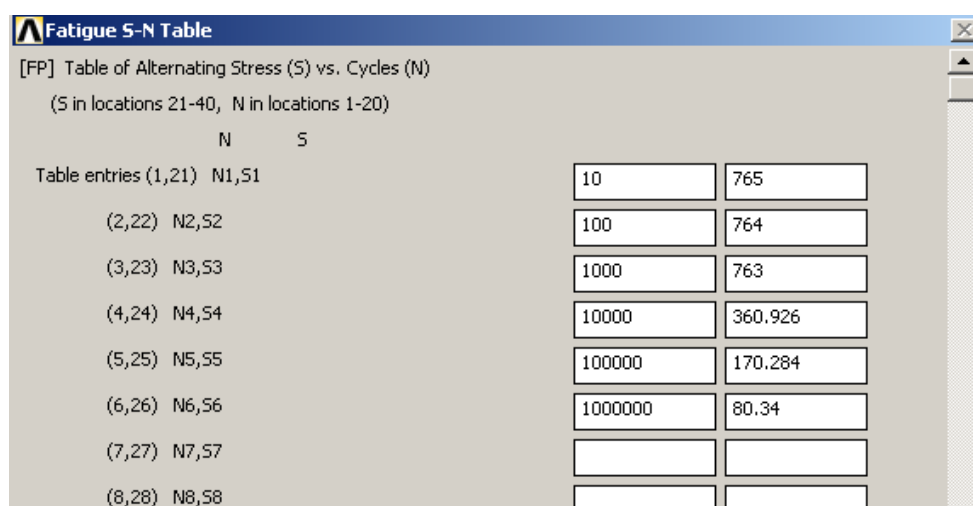


Figura 196. Cuadro "Fatigue S-N Table" con los puntos clave definidos.

Habiendo definido la curva $S - N$ del material que constituye el sistema, es interesante, antes de continuar con el estudio, definir una serie de conceptos que ANSYS utiliza para llevar a cabo análisis a fatiga. Estos son:

- **“Location”**: Nodo del modelo sobre el que se llevará a cabo el análisis a fatiga.
- **“Event”**: Conjunto de estados de carga que forman parte de un ciclo en el análisis a fatiga.
- **“Loading”**: cada uno de los estados de carga que forman parte de un ciclo.

Conocidos estos conceptos debe definirse el nodo sobre los que se realizará el análisis a fatiga. Éste será el más solicitado en el cambio de sección desde la zona de apoyo de la caja de grasa hasta la sección de calaje (Nodo 96943), tal y como se muestra en la figura 197, ya que, de cálculos anteriores se pueden descartar el resto de las secciones. Para determinar dicho nodo se sigue el siguiente proceso: *General Postproc* \Rightarrow *Fatigue* \Rightarrow *Stress Locations*.

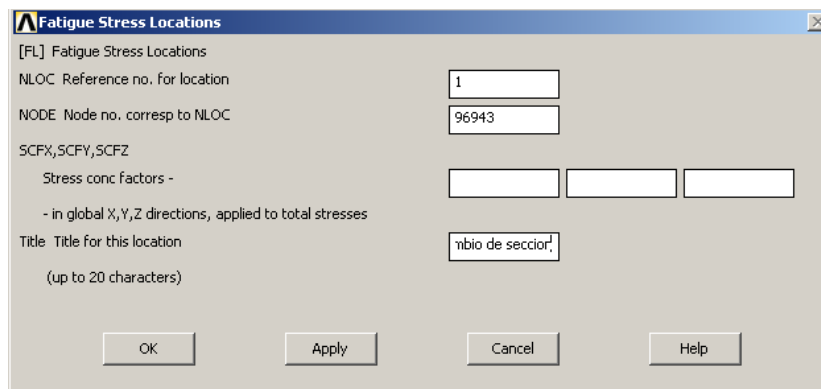


Figura 197. Determinación del nodo para analizar a fatiga.

A continuación se carga la solución del primer estado de carga mediante *General Postproc* \Rightarrow *Read Results* \Rightarrow *By pick* y se registra dicho estado para el análisis a fatiga desde el menú principal siguiendo la siguiente cadena de comandos *General Postproc* \Rightarrow *Fatigue* \Rightarrow *Store stresses* \Rightarrow *From rst file* (figura 198). El mismo procedimiento habría que seguir cargando la solución del segundo estado de carga (figura 199).

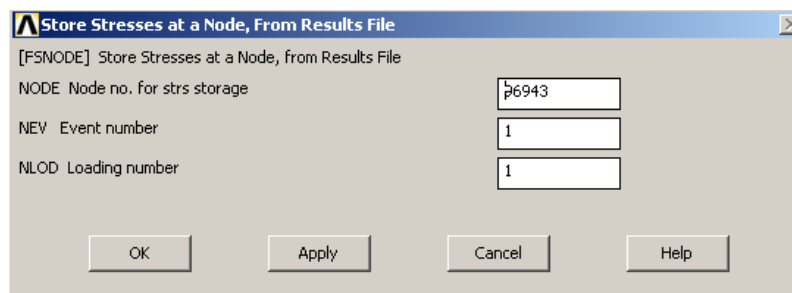


Figura 198. Registro del primer estado de carga para el análisis a fatiga.

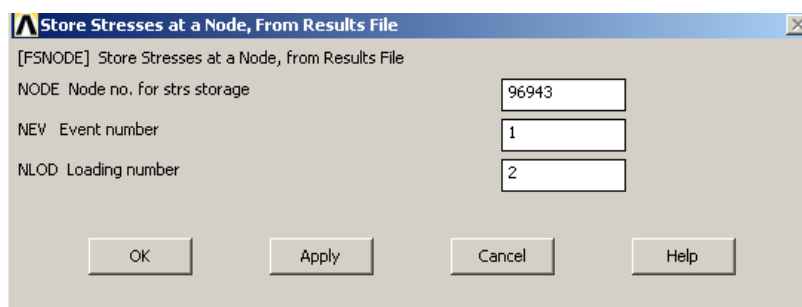


Figura 199. Registro del segundo estado de carga para el análisis a fatiga.

Tras definir el nodo sobre el que se llevará a cabo el análisis se define el número de ciclos de carga que se aplicarán (ver figura 200), lo que se llevará a cabo desde el menú principal, seleccionando *General Postproc* \Rightarrow *Fatigue* \Rightarrow *Assign event*. En este caso, se aplicará exclusivamente 1 ciclo, puesto que lo que interesa es el límite a fatiga y no la fatiga acumulada.

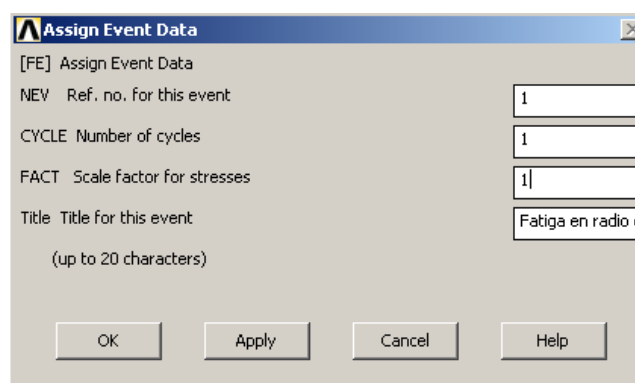


Figura 200. Selección del número de ciclos a aplicar.

Finalmente se pasa a realizar el cálculo a fatiga seleccionando *General Postproc* \Rightarrow *Fatigue* \Rightarrow *Calculate Fatig*, obteniéndose el cuadro representado en la figura 201.

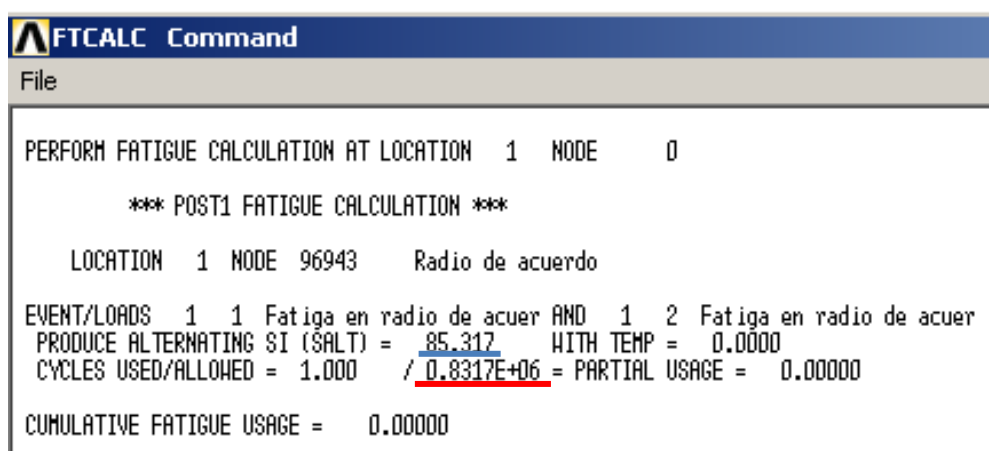


Figura 201. Resultado del análisis a fatiga.

En dicha figura, puede observarse subrayado en azul, cuál es el valor de la tensión alternante en el eje. Asimismo, se muestra, subrayado en rojo la vida a fatiga del mismo. Nótese que, mediante el programa de elementos finitos, ésta es un 20% inferior a la calculada analíticamente.

9.3 Análisis de sensibilidad.

Se ha llevado a cabo el análisis a fatiga del eje ferroviario que es objeto de interés en el presente proyecto sometiéndolo a una carga de 25t. Bajo estas condiciones se ha obtenido que el límite a fatiga será de 994987,534 *ciclos*, si el cálculo es realizado analíticamente; y de 831700 *ciclos* si se utiliza la aplicación informática ANSYS.

Sin embargo, el periodo de revisión de un eje ferroviario suele marcarse en 10^8 ciclos. Esto quiere decir, que al ser dicho periodo superior a 10^6 ciclos, los ejes ferroviarios deben ser diseñados a vida infinita. Por tanto, en los análisis realizados se está sobrecargando el eje.

En el presente apartado, se pretende obtener el valor de la carga máxima que soportará el eje ferroviario para que cumpla las condiciones de vida infinita.

De este modo, analíticamente resultará que, utilizando la ecuación correspondiente al criterio de Goodman y a la teoría E.C.M y siendo $S_e = 55,39MPa$, el valor del momento flector máximo para vida infinita sobre el eje será:

$$d = \left[\frac{32 \cdot n}{\pi} \left(\left(\frac{T}{S_u} \right)^2 + \left(\frac{M}{S_e} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} \Rightarrow M = S_e \cdot \sqrt{\left(\frac{d^3 \cdot \pi}{32 \cdot n} \right)^2 - \left(\frac{T}{S_u} \right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 55,39MPa \cdot 10^6 \cdot \sqrt{\left(\frac{0,150^3 \cdot \pi}{32 \cdot 1,33} \right)^2} = 13,8 kN \cdot m$$

Esto conllevaría que la carga máxima que soportaría el eje vendría dada por:

$$\frac{25t}{16,3kN \cdot m} = \frac{Q_{max}}{13,8kN \cdot m} \Rightarrow Q_{max} = 21,165t$$

Aplicando el método de los elementos finitos (figura 202), se comprueba que con el dato de la carga máxima aplicable para vida infinita obtenido mediante cálculo analítico ($Q_{max} = 21,165t$) se cumple que el periodo de vida a fatiga sea superior a 10^6 ciclos.

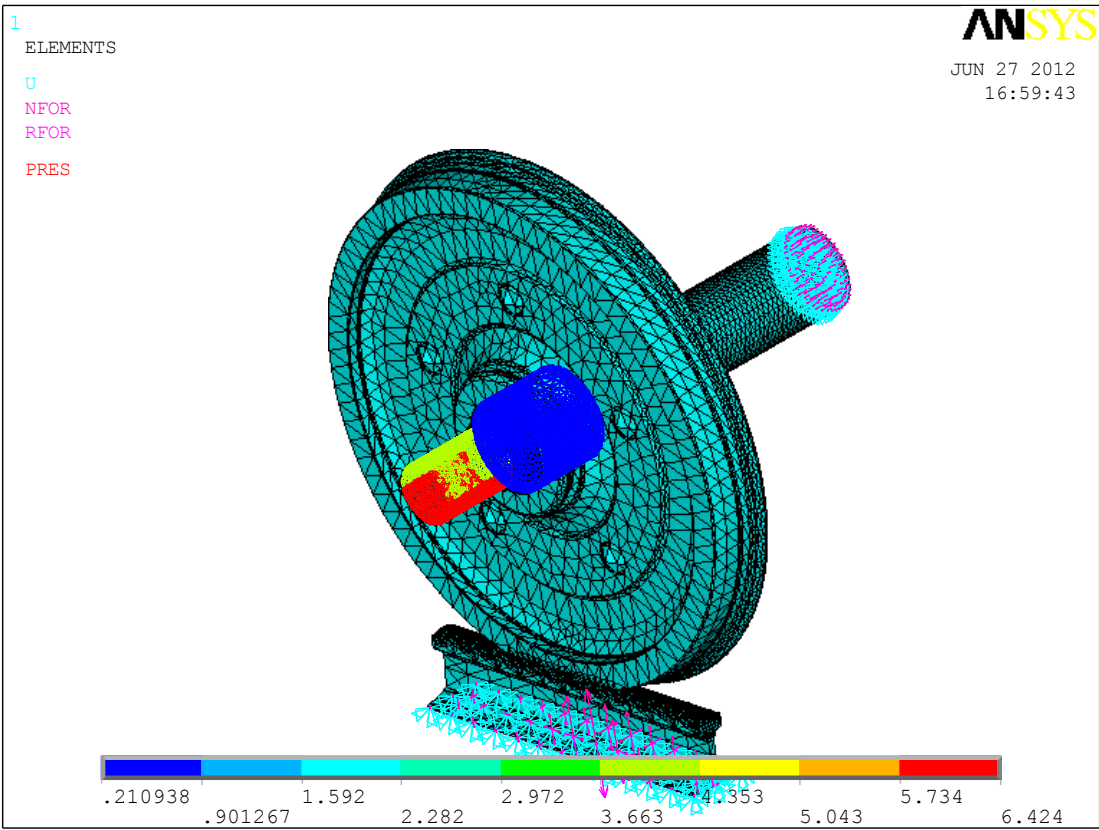


Figura 202. Análisis a fatiga mediante la aplicación del MEF.

Asimismo, se consigue el número de ciclos que soportaría el eje sometido a diferentes niveles de carga (ver tabla 13 y figura 203).

Tabla 13. Límite a fatiga del eje ferroviario en función del número de ciclos.

Q(t)	N(ciclos)
10	1000000
15	1000000
20	1000000
21,165	1000000
25	831700
30	475900
35	296700
40	197000
45	137300
50	99420

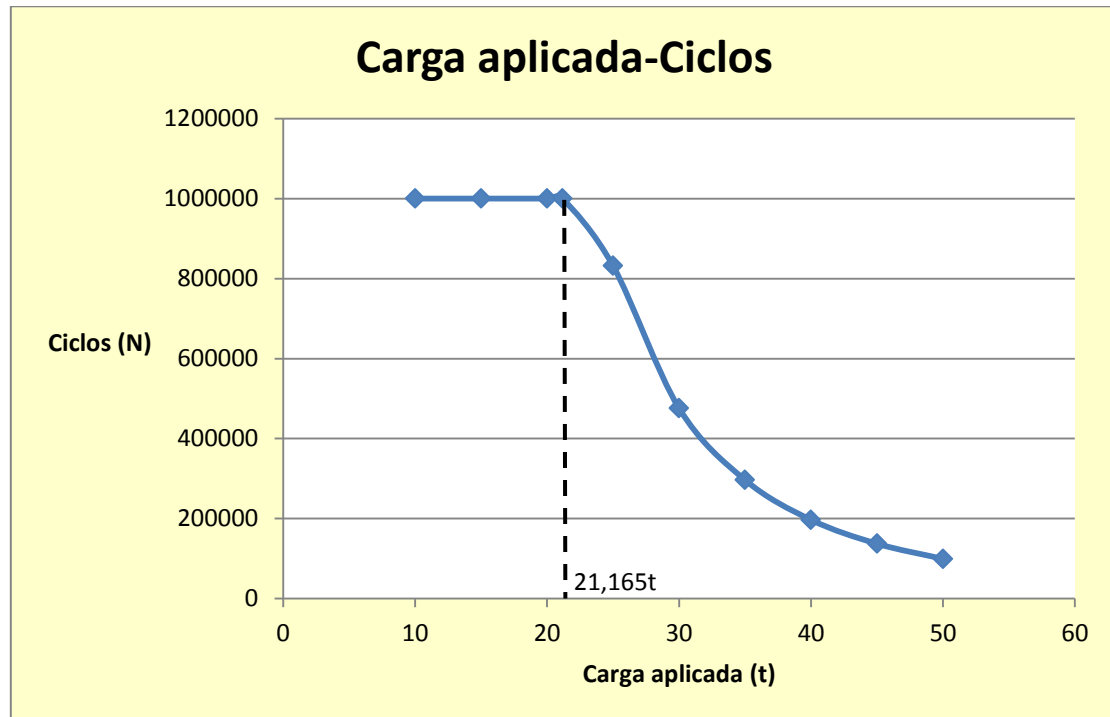


Figura 203. Resultado del análisis a fatiga.

9.4 Conclusiones del análisis.

Se ha llevado a cabo el análisis a fatiga del eje ferroviario objeto de estudio utilizando el método analítico de cálculo de fatiga y el programa de elementos finitos ANSYS. Se observa que los resultados obtenidos aplicando el MEF se alejan de manera considerable (un 20%) de los resultados analíticos, que se tomarán como los más cercanos a los reales. En todo caso, se comprueba que los resultados del MEF no se pueden considerar totalmente fidedignos.

Por otro lado, analíticamente se ha concretado que, para una carga de 25t, el eje no cumpla las condiciones de vida infinita. Para que sí se satisfagan, no se debe superar una carga de 21,165t.

Capítulo 10

Estudio de un eje fisurado mediante el método de los elementos finitos.

10.1 Determinación del FIT combinando el método del balance de energías y el MEF en un eje ferroviario.

10.1.1 Introducción.

Se modelizará una fisura elíptica (figura 204), cuya situación en el eje se indica en la figura 205, con las siguientes características:

- $2h = 9,55 \text{ mm}$
- $a = 3 \text{ mm}$
- $a + \Delta a = 3,5 \text{ mm}$

- $D = 205 \text{ mm}$ (Diámetro del eje, que aproximadamente sería B en los apartados anteriores)
- Dos cargas diferentes aplicadas, la primera de 25 tm/eje y la segunda de 320 tm/eje .

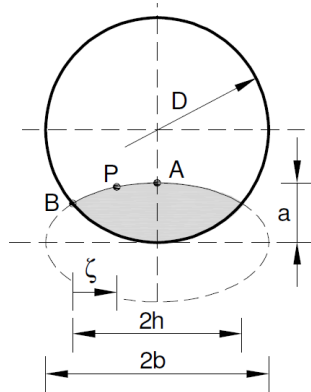


Figura 204. Geometría transversal de la fisura.

El cálculo del FIT se llevará a cabo a través de dos vías:

- A. Aplicando el método del balance de energías y el método de los elementos finitos.
- B. Aplicando las ecuaciones conocidas de la Mecánica de la Fractura Lineal y elástica.

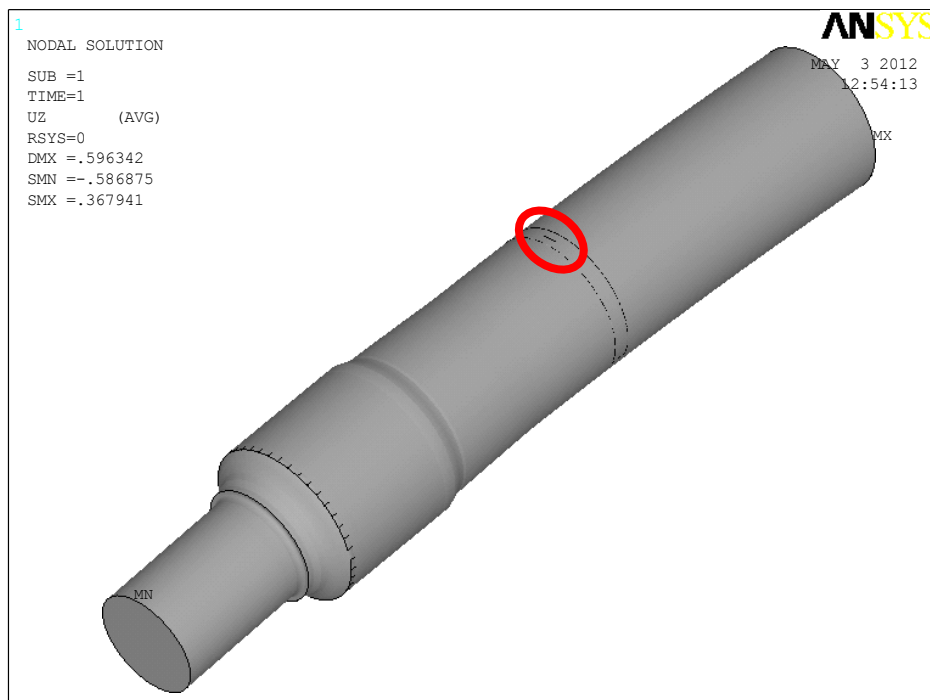


Figura 205. Situación de la fisura modelizada en el eje ferroviario de interés.

10.1.2 Hipótesis consideradas.

Se tendrán en cuenta las hipótesis de la Mecánica de la Fractura Lineal y Elástica:

- Material elástico lineal (acero F222).
- Problema bidimensional: puesto que la fisura es pequeña se puede asimilar que se encuentra en un plano en el que también está aplicada la carga, ya que ésta no será la fuerza que se aplica al eje, sino la tensión existente alrededor de la fisura producida por ella.
- Carga estática.
- Se seguirá la hipótesis de deformación plana.

10.1.3 Cálculo del FIT.

En las figuras 206 y 207 se observa la modelización de una fisura de longitud $a=3\text{mm}$, mientras que en las figuras 209 y 210 la fisura tiene una longitud de $(a+\Delta a)=3,5\text{mm}$.

En la figura 208 se presenta el mallado de tamaño $0,5\text{mm}$ con elementos SOLID95 de la zona de la fisura de $a=3\text{mm}$ y en la figura 211 el mallado, de las mismas características que en el del caso anterior, de la fisura de longitud $(a+\Delta a)=3,5\text{mm}$.

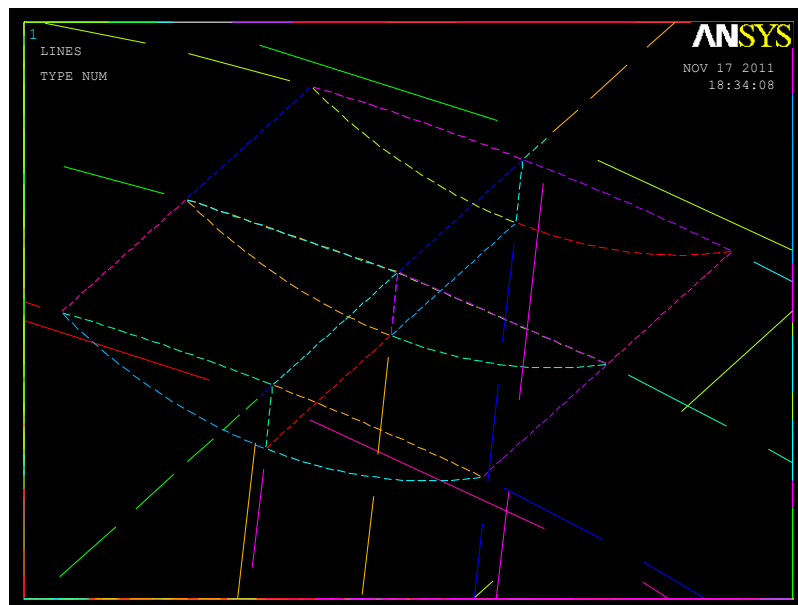


Figura 206. Geometría de la fisura de longitud $a=3\text{mm}$ (Líneas).

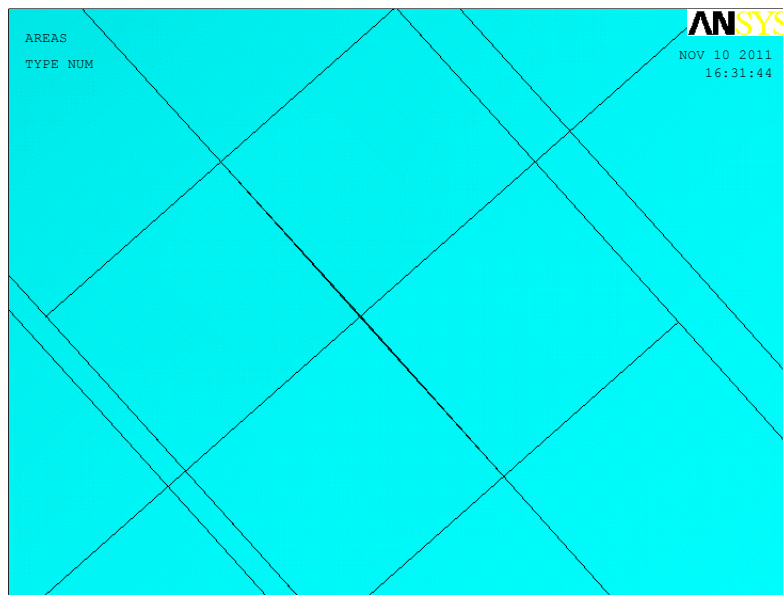


Figura 207. Geometría de la fisura de longitud $a=3\text{mm}$ (Áreas).

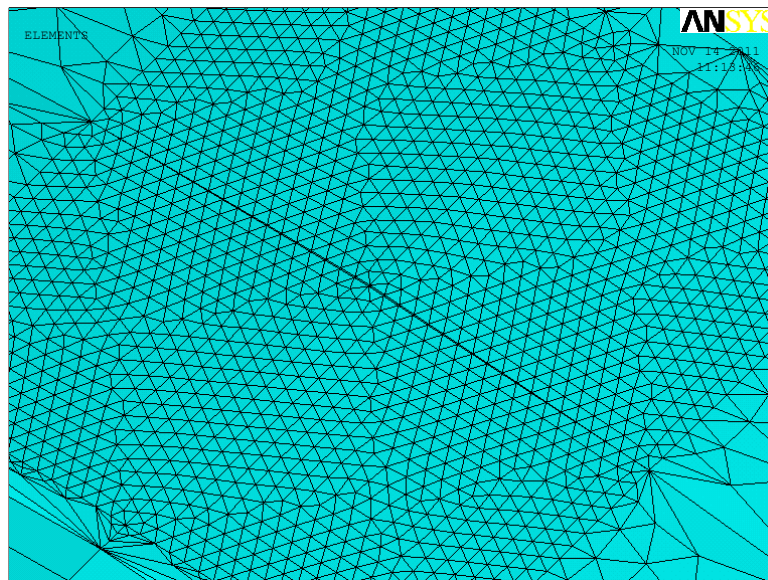


Figura 208. Mallado con SOLID95 de la fisura de longitud $a=3\text{mm}$.

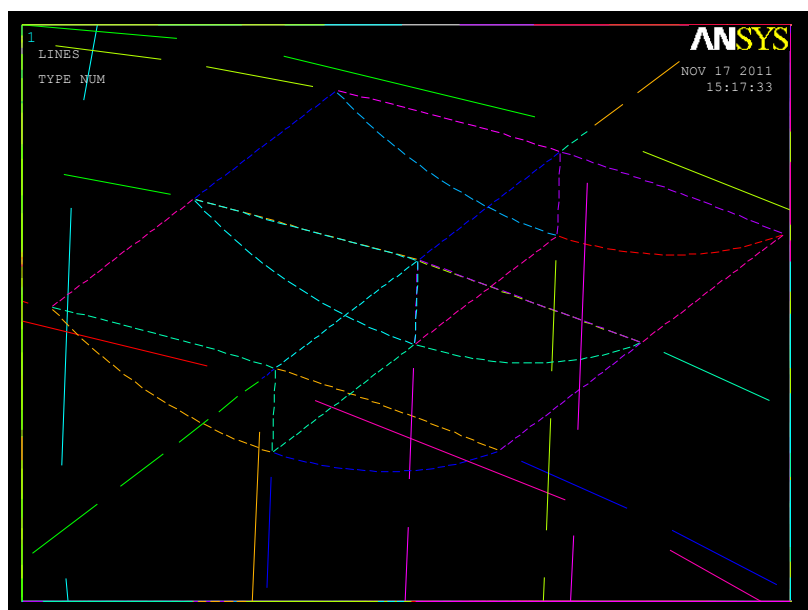


Figura 209 .Geometría de la fisura de longitud $(a+\Delta a)=3.5\text{mm}$ (Líneas).

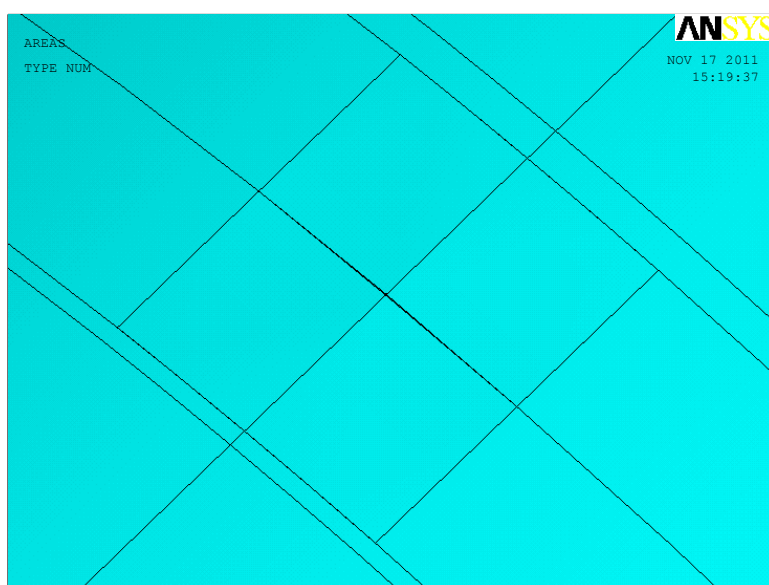


Figura 210. Geometría de la fisura de longitud $(a+\Delta a)=3.5\text{mm}$ (Áreas).

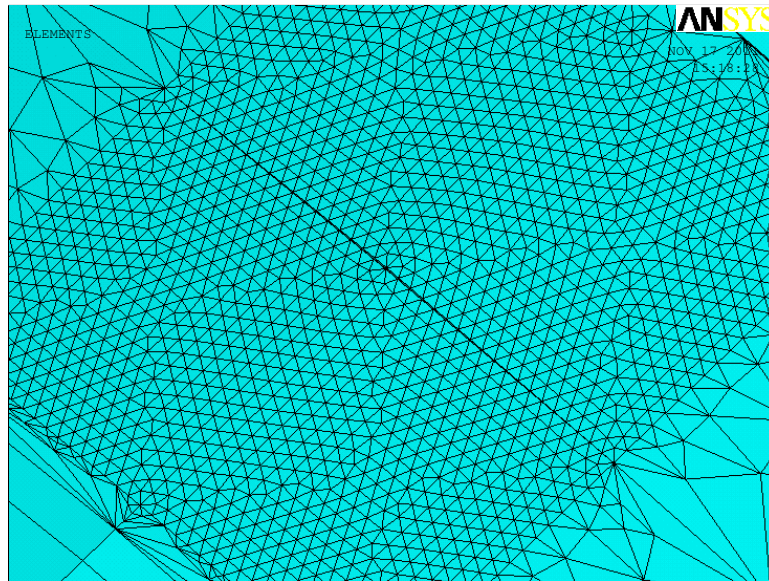


Figura 211. Mallado con SOLID95 de la fisura de longitud $(a+\Delta a)=3.5\text{mm}$.

Como se ha mencionado, para el mallado de la fisura se utilizará el elemento SOLID95, que es una versión de orden superior del elemento sólido SOLID45. Esto es debido a que SOLID95 tolera formas irregulares sin pérdida de precisión en el cálculo del desplazamiento y está bien adaptado para modelar límites curvos. Se define por 20 nodos con tres grados de libertad por nodo: traslaciones en los nodos x, y, z , pudiendo tener cualquier orientación espacial (ver figura 212). [41]

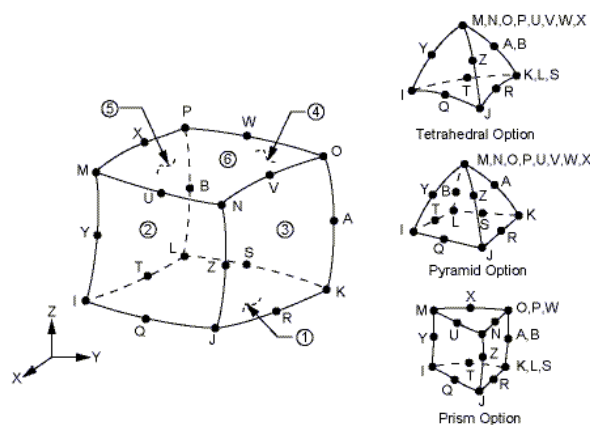


Figura 212. Elemento SOLID 95.

Solucionando los modelos con la carga de 25t, en la figura 213 se observa el campo tensional referido a la fisura de longitud $a=3\text{mm}$ en el extremo de la misma, que no se puede tomar como real. Sin embargo, el elevado gradiente tensional que se muestra avanzando en profundidad a través de la fisura, donde se pasa de un valor nulo de tensión a otro de **123MPa**, es una indicación de la singularidad existente. Por su parte, en la figura 214 se observa el campo tensional correspondiente a una fisura de longitud $(a+\Delta a)=3,5\text{mm}$.

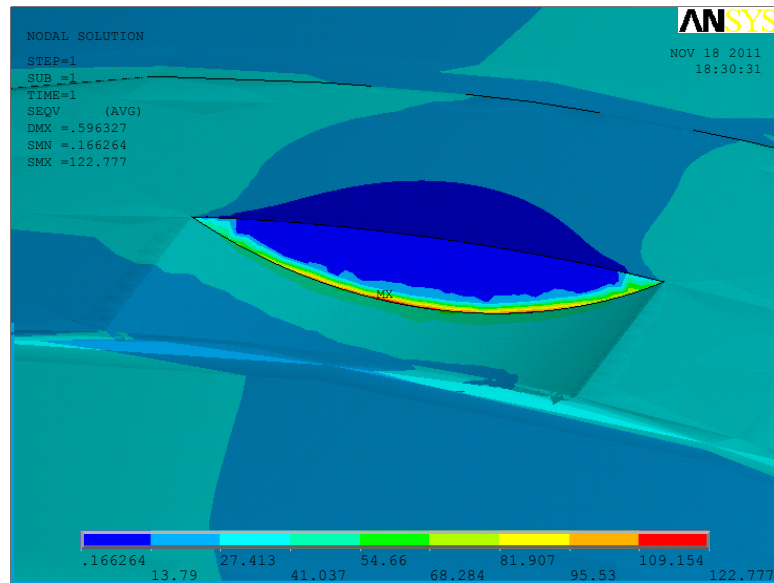


Figura 213. Campo tensional en los bordes de la fisura de longitud $a=3\text{mm}$ bajo una carga de $25Tm$.

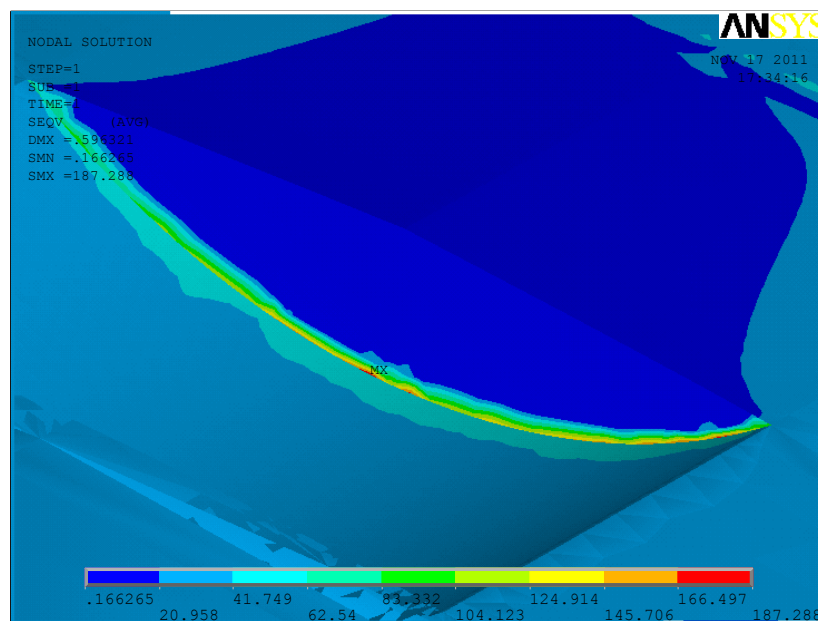


Figura 214. Campo tensional en los bordes de la fisura de longitud $(a+\Delta a)=3.5\text{mm}$ bajo una carga de $25Tm$.

Por otra parte, solucionando los modelos con la carga de $320Tm$, se buscan los mismos objetivos que cuando se aplicaba la carga de $25Tm$. En la figura 215 se observa el campo tensional referido a la fisura de longitud $a=3\text{mm}$. Por otro lado, en la figura 216 se presenta el campo tensional correspondiente a una fisura de longitud $(a+\Delta a)=3.5\text{mm}$. En este caso la singularidad es aún más perceptible, alcanzándose valores tensionales de hasta **1572MPa**.

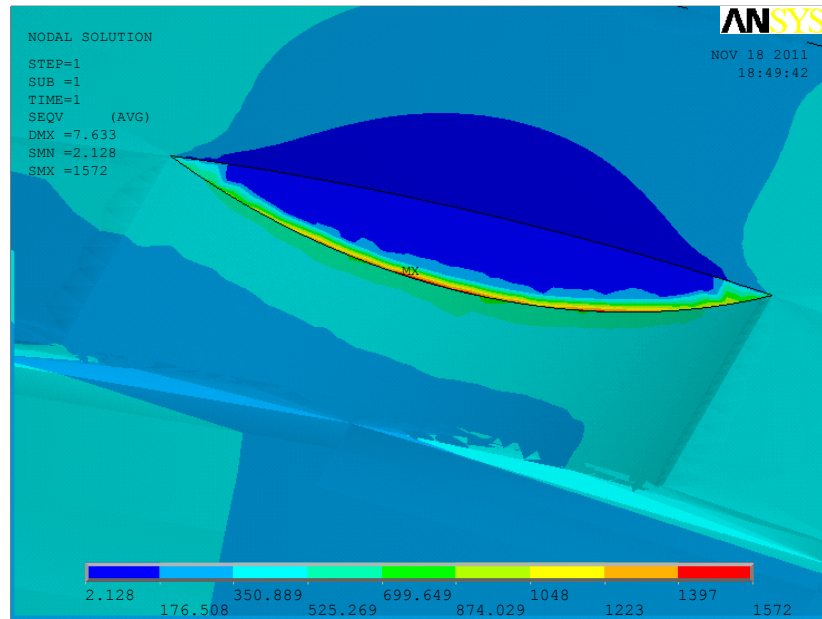


Figura 215. Campo tensional en los bordes de la fisura de longitud $a=3\text{mm}$ bajo una carga de 320Tm.

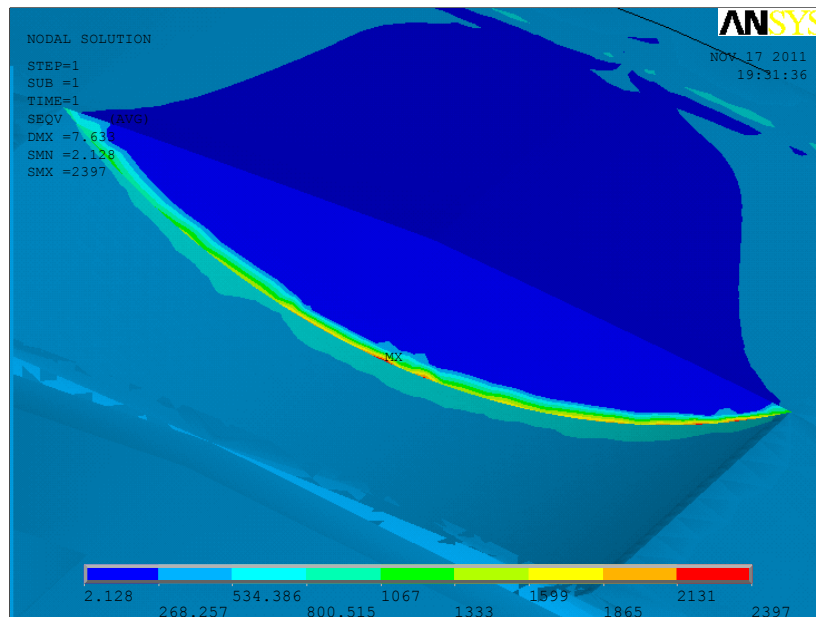


Figura 216. Campo tensional en los bordes de la fisura de longitud $(a+\Delta a)=3.5\text{mm}$ bajo una carga de 320Tm.

Aplicando, tal y como se ha dicho, el método del balance de energía, se obtienen los factores de intensidad de tensiones en el borde de fisura que se representan en las tablas 14 (para una carga sobre el eje de 25t/eje) y 15 (para una carga de 320t/eje). Por otro lado, en la figura 217 se muestran las gráficas del FIT en función de la longitud de la fisura.

Sin embargo, para cada uno de los dos casos es necesario conocer un único factor de intensidad de tensiones. Esto se llevará a cabo haciendo la media aritmética de los diferentes valores del FIT calculados, despreciándose los 2 últimos pares de puntos, por considerarse que se encuentran muy cerca del borde de fisura y los 5 primeros pares de puntos, por estar muy lejos del borde de fisura. De esta forma, quedan determinados los valores de K_I que se representan en la tabla 16.

Tabla 14. Cálculo del FIT para una carga de 25Tm

Par de puntos	DESPL. RELATIVO BORDE FISURA a=3mm	DESPL. RELATIVO BORDE FISURA a+Δa=3.5mm	G(N/m)	K_I (MPam ^{1/2})
1	0,00116886	0,00119094	0,000215415	7,050607737
2	0,00111435	0,00113988	0,000249073	7,581452636
3	0,00106122	0,00108882	0,000269268	7,882819092
4	0,0010074	0,00103569	0,000276	7,980746065
5	0,00095289	0,00098049	0,000269268	7,882819092
6	0,00089562	0,00092115	0,000249073	7,581452636
7	0,00083421	0,00085629	0,000215415	7,050607737
8	0,00076521	0,00078453	0,000188488	6,595239631
9	0,00068793	0,00070311	0,000148098	5,846055102
10	0,00059409	0,00060651	0,000121171	5,287955803
11	0,00044643	0,00046161	0,000148098	5,846055102
12	0,00028842	0,00028842	0	0

Tabla 15. Cálculo del FIT para una carga de 320Tm.

Par de puntos	DESPL. RELATIVO BORDE FISURA a=3mm	DESPL. RELATIVO BORDE FISURA a+Δa=3.5mm	Gf(N/m)	K_I (MPam ^{1/2})
1	0,0149661	0,0152421	0,002447894	23,76759383
2	0,0142623	0,0145866	0,002876275	25,76345779
3	0,0135792	0,0139311	0,003121064	26,83739199
4	0,012903	0,0132618	0,003182262	27,0992264
5	0,0121992	0,0125511	0,003121064	26,83739199
6	0,0114609	0,0117921	0,002937472	26,03609456
7	0,0106743	0,0109641	0,002570288	24,35453638
8	0,0097911	0,0100395	0,002203104	22,54791931
9	0,0088044	0,0090045	0,001774723	20,23737692
10	0,0076038	0,0077625	0,001407539	18,02267037
11	0,0057132	0,0059064	0,001713525	19,88539569
12	0,003691500	0,003691500	0,0000E+00	0

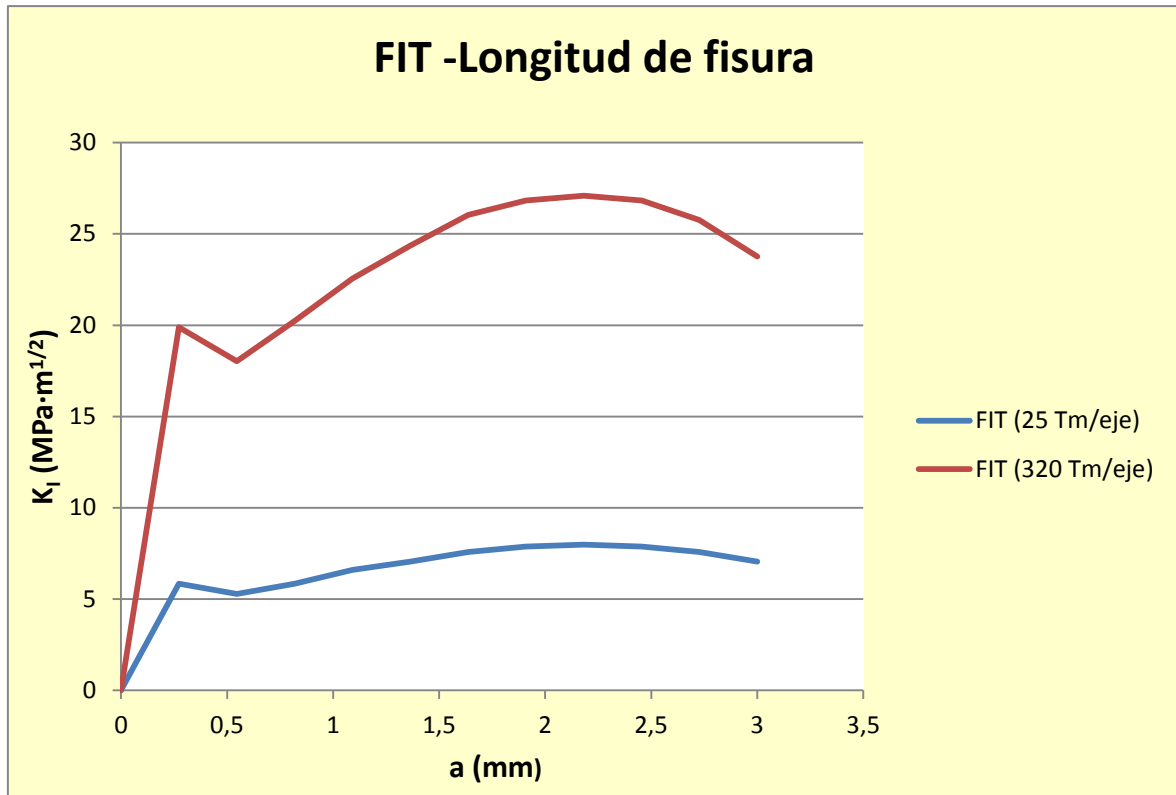


Figura 217. FIT en función de la longitud de fisura (a).

Tabla 16. Valor del FIT en modo de fractura I calculado utilizando el MEF.

Carga (Tm)	Valor del factor de intensidad de tensiones (FIT), K_I (MPa·m ^{1/2})
25	6,365197206
320	21,50493896

10.2 Cálculo analítico del FIT mediante la MFLE.

En la figura 218 se muestra la tensión en dirección axial (que es la que interesa, puesto que se está tomando modo I de fractura) del eje sin fisurar sometido a 25t (125kN). Por su parte, en la figura 219 se muestra el campo tensional equivalente al anterior cuando el eje está sometido a una carga de 320 t (1600kN). El valor de la tensión en la zona donde se encontraría la fisura es necesario para calcular el valor del FIT analíticamente.

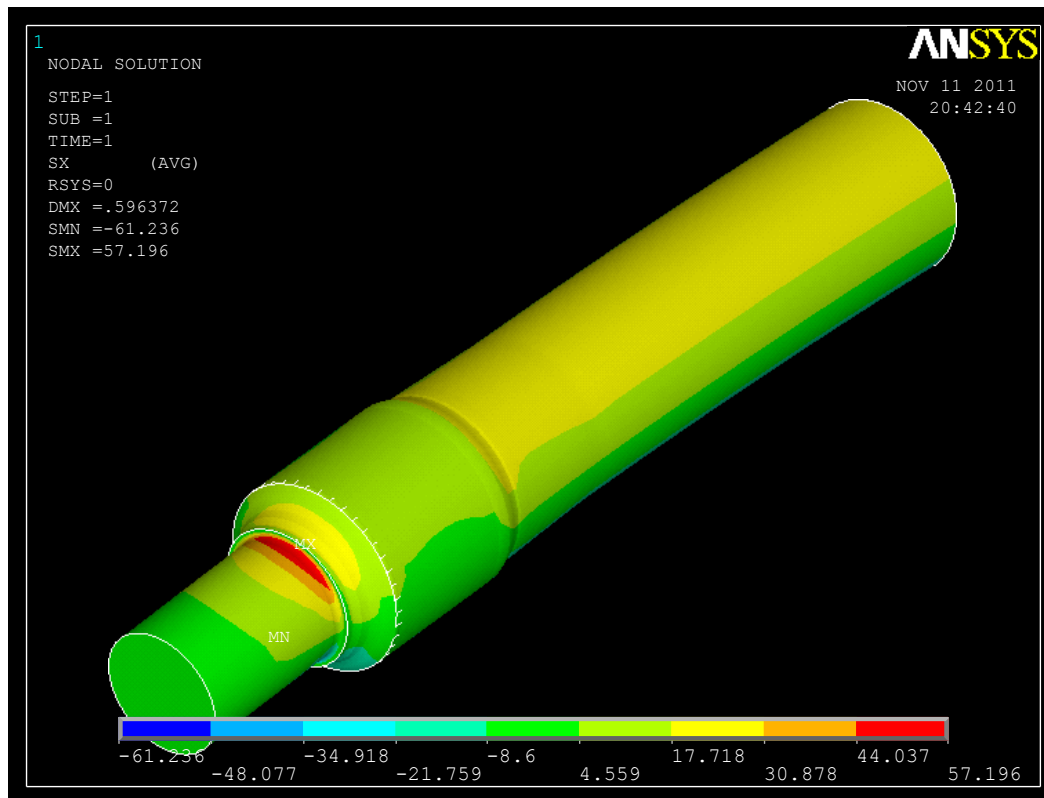


Figura 218. Campo tensional en dirección axial del eje sin fisurar bajo una carga de 25 tm.

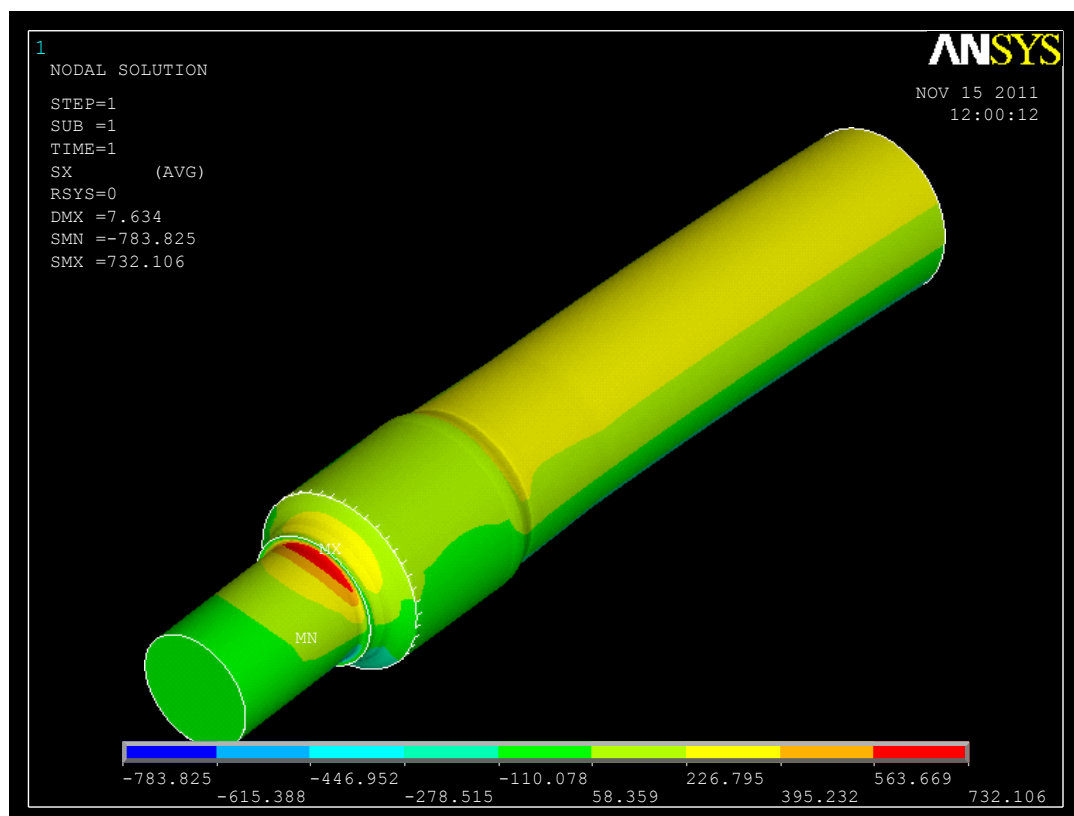


Figura 219. Campo tensional en dirección axial del eje sin fisurar bajo una carga de 320 tm.

Por otro lado, y con mero carácter representativo, en la figura 220 se presenta la tensión en dirección axial que se obtiene, mediante la aplicación del MEF, del eje fisurado sometido a 25t.

Las diferencias existentes en la figura 220 respecto de la 218 se reducen a que el valor de tensión máximo se traslada a la parte más profunda de la fisura. En las zonas lo suficientemente alejadas de la grieta se mantienen los mismos niveles que en la figura 218, aunque varíen las tonalidades como consecuencia de la tendencia a infinito de los valores tensionales en el fondo de la misma.

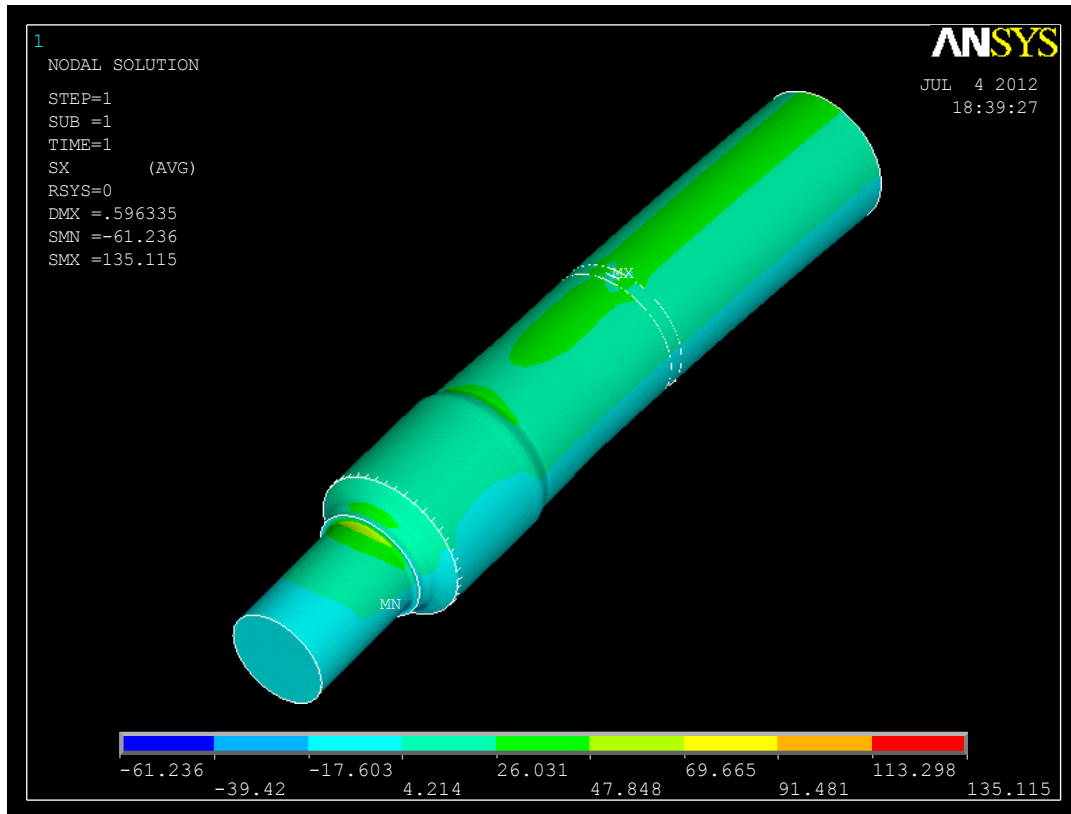


Figura 220. Campo tensional en dirección axial del eje sin fisurar bajo una carga de 25 tm.

Haciendo referencia a la figura 204, y a partir de la caracterización de fisuras llevada a cabo por Carpinteri, Shih y Chen, [39] y [40], la ecuación (10.1) será la utilizada para el cálculo del FIT.

$$K_I = Y \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot h} \quad (10.1)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 Y = & 0,455 - 0,233(a/b) + 4,893(a/D) + 0,113(a/b)^2 + 0,197(a/b)(a/D) - \\
 & -21,03(a/D)^2 + 0,557(a/b)^2(a/D) + 3,134(a/b)(a/D)^2 + \\
 & +49,497(a/D)^3 - 5,415(a/b)^2(a/D)^2 - 1,124(a/b)(a/D)^3 - \\
 & -24,702(a/D)^4
 \end{aligned}$$

$$Y = 0.51568 \Rightarrow \begin{cases} K_{I,25Tm} = 0,51568 \cdot 27,97 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0.003} = 1,40 MPa \cdot \sqrt{m} \\ K_{I,320Tm} = 0,51568 \cdot 263,06 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0.003} = 13,17 MPa \cdot \sqrt{m} \end{cases}$$

De esta forma, en la tabla 17, se indica el valor del FIT calculado analíticamente mediante la Mecánica de la Fractura Lineal y Elástica (MFLE).

Tabla 17. Valor del FIT en modo de fractura I calculado analíticamente utilizando la MFLE.

Carga (Tm)	Valor del factor de intensidad de tensiones (FIT), K_I (MPa·m ^{1/2})
25	1,40
320	13,17

10.3 Conclusiones del análisis.

El método de los elementos finitos como sistema de estudio de sólidos fisurados, al aplicar las ecuaciones de la elasticidad, presenta singularidades de tensión y deformaciones cerca del extremo de las fisuras. Esto no ocurre cuando se analizan los desplazamientos, por lo que podría utilizarse para obtener el valor del FIT aplicando el método de balance de energías.

En base a esta hipótesis, se han aplicado dichos métodos obteniéndose unos valores de K_I que, aunque coinciden en orden de magnitud, no son representativos de la realidad. Esto puede ser debido a que, como se muestra en las tablas 14 y 15, los desplazamientos relativos entre los bordes de fisura son tan pequeños (entre 10^{-3} y 10^{-4} mm) que cualquier error de cálculo (incluso el interno del propio ordenador), de modelización o de simplificación produce grandes variaciones en el resultado final.

Por tanto, el MEF puede servir para aportar una orientación de lo que está ocurriendo cerca del borde de una fisura presente en un sólido elástico, pero los errores debidos a singularidades, al tipo de elemento utilizado, al mallado realizado y a otras variables incontrolables hacen que exista una incertidumbre tal que sean siempre necesaria la realización de ensayos (aunque el Método de los Elementos Finitos permita que éstos se vean reducidos).

Por otro lado, en capítulos anteriores se ha visto, que los resultados analíticos nunca han coincidido con los realizados mediante una simulación por elementos finitos. Todo ello refrenda la idea planteada en el párrafo anterior: aunque se apliquen simuladores, los ensayos son indispensables.

Capítulo 11

Aplicación del MEF al análisis adimensional para la interpretación de resultados de un banco de ensayos de ejes a escala.

11.1 Introducción.

Habiéndose dado a conocer los conceptos matemáticos básicos para la comprensión del MEF, así como completado la realización de algunos de los análisis especificados en el apartado 1.2 (Objetivos) y en el capítulo 7 (Metodología), se han comparado, en aquellos casos donde era posible, los modelos de elementos finitos con los correspondientes cálculos analíticos equivalentes. En todos los casos se ha comprobado que los resultados, al comparar, no coincidían.

Se han tomado los resultados del cálculo analítico como los más próximos a la realidad. Evidentemente, realizando un ensayo real de cada uno de los modelos planteados (algo inviable actualmente) se obtendría un dato más fiable con el que comparar. No obstante, los cálculos realizados corresponden a sistemas de cálculo ampliamente afianzados en el campo de la Resistencia de Materiales, que han sido utilizados y siguen utilizándose actualmente. Dichos cálculos presentan un grado de consolidación y robustez que permiten su utilización como referencia adecuada.

En los modelos de elementos finitos, y en cualquier modelo de simulación en general, se llevan a cabo simplificaciones en la geometría, aceptación de hipótesis de comportamiento del sistema -que en ocasiones hasta se pueden estar llevando a cabo de manera inconsciente-, aplicación de condiciones de contorno y cargas de forma diferente a como ocurre en la realidad, etc. Pero, ¿cómo cuantificar la incertidumbre que generan estas asunciones? Es imposible. De ahí, la utilización de coeficientes de seguridad en los diseños.

Así, se ha demostrado que las técnicas de simulación pueden servir como orientación del comportamiento del sistema, lo que facilitará el correcto dimensionamiento y la minimización del número de prototipos, con el ahorro de costes que conlleva. Sin embargo, también se confirma que los resultados obtenidos con dichas técnicas, nunca deberán ser utilizados como fidedignas representaciones de la realidad.

Por ello, en el presente proyecto, se plantea la posibilidad de emplear un banco de ensayos de ejes ferroviarios para comprobar las diferentes hipótesis y conclusiones llevadas a cabo. En principio, como se ha indicado en la metodología, se dispone de sendos bancos de ensayos a unas escalas de 1:4 y de 1:8 respecto del modelo real.

De este modo, en este capítulo se utilizará el método de los elementos finitos (MEF) para obtener las diferentes relaciones de escala entre modelos escalados. Se comenzará analizando un cilindro (de longitud igual a 1000mm y de diámetro 200mm), que será sometido a diferentes cargas y condiciones de contorno, para, posteriormente, extrapolar las conclusiones alcanzadas al conjunto eje-raíl-rueda.

Para ello, el MEF puede ser utilizado debido a que, aunque los resultados absolutos no puedan considerarse reales, puesto que se están utilizando ecuaciones de la elasticidad las relaciones adimensionales sí que corresponderán a las verdaderas.

11.2 Análisis adimensional modal.

11.2.1 Introducción.

El análisis modal consiste en determinar las frecuencias de vibración y los modos propios. Las vibraciones pueden afectar a la funcionalidad o durabilidad de los sistemas mecánicos bajo condiciones de servicio. La adecuada respuesta en servicio debe garantizar el confort de los usuarios, la ausencia de deterioros originados por efectos dinámicos y el correcto funcionamiento y durabilidad de posibles maquinarias, servicios, instalaciones, etc., sensibles a estos fenómenos.

Los efectos dinámicos a considerar pueden ser inducidos por maquinarias, movimientos sincronizados de personas (andando, corriendo, bailando o saltando), sobrecargas de tráfico vial o ferroviario, vibraciones del terreno adyacente y viento. Dichos efectos pueden resultar amplificados por condiciones de resonancia.

Para limitar los efectos vibratorios en las estructuras, los valores de sus frecuencias propias, o de las de elementos estructurales aislados, deben estar suficientemente alejados (generalmente superiores) de las frecuencias de las eventuales fuentes de excitación, con objeto de evitar fenómenos de resonancia. En sistemas con frecuencias propias bajas debería procederse a un análisis dinámico refinado de la respuesta estructural (amplitudes, velocidades y aceleraciones), que incluya la consideración de los posibles amortiguamientos, lo que no es de interés en el presente proyecto.

En este apartado, para el cálculo de los modos propios de vibración, se considerará el cilindro especificado en el apartado 11.1 constituido de los materiales especificados en la tabla 18 en el rango de escalas desde 1:1 hasta 1:10.

Tabla 18. Materiales a utilizar en el estudio de los modos propios de vibración.

	Acero	Aluminio	Hierro colado
E (GPa)	210	70	175
ν	0,33	0,33	0,23
ρ (kg/m³)	7850	2700	7250

11.2.2 Análisis adimensional modal de un cilindro libre en el espacio.

En el primer caso de análisis adimensional modal se estudia un cilindro libre en el espacio, tal y como se muestra en la figura 221. En las figuras 222, 224, y 226 se muestra la evolución de los primeros 25 modos propios de vibración desde escala 1:1 hasta escala 1:10 en los casos de que el cilindro esté constituido por acero, aluminio o hierro colado, respectivamente.

Por su parte, en las figuras 223, 225, y 227 se indica el factor de escala o coeficiente adimensional para cada uno de las situaciones antes mencionadas, estando el cilindro formado por acero, aluminio o hierro colado, respectivamente.

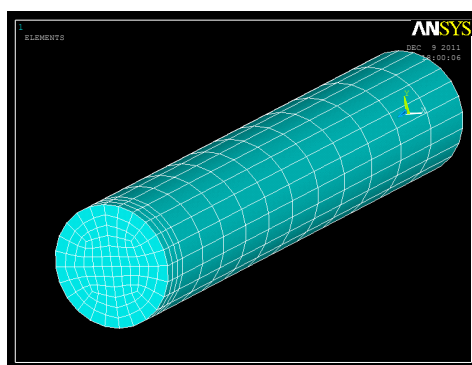


Figura 221. Cilindro libre en el espacio.

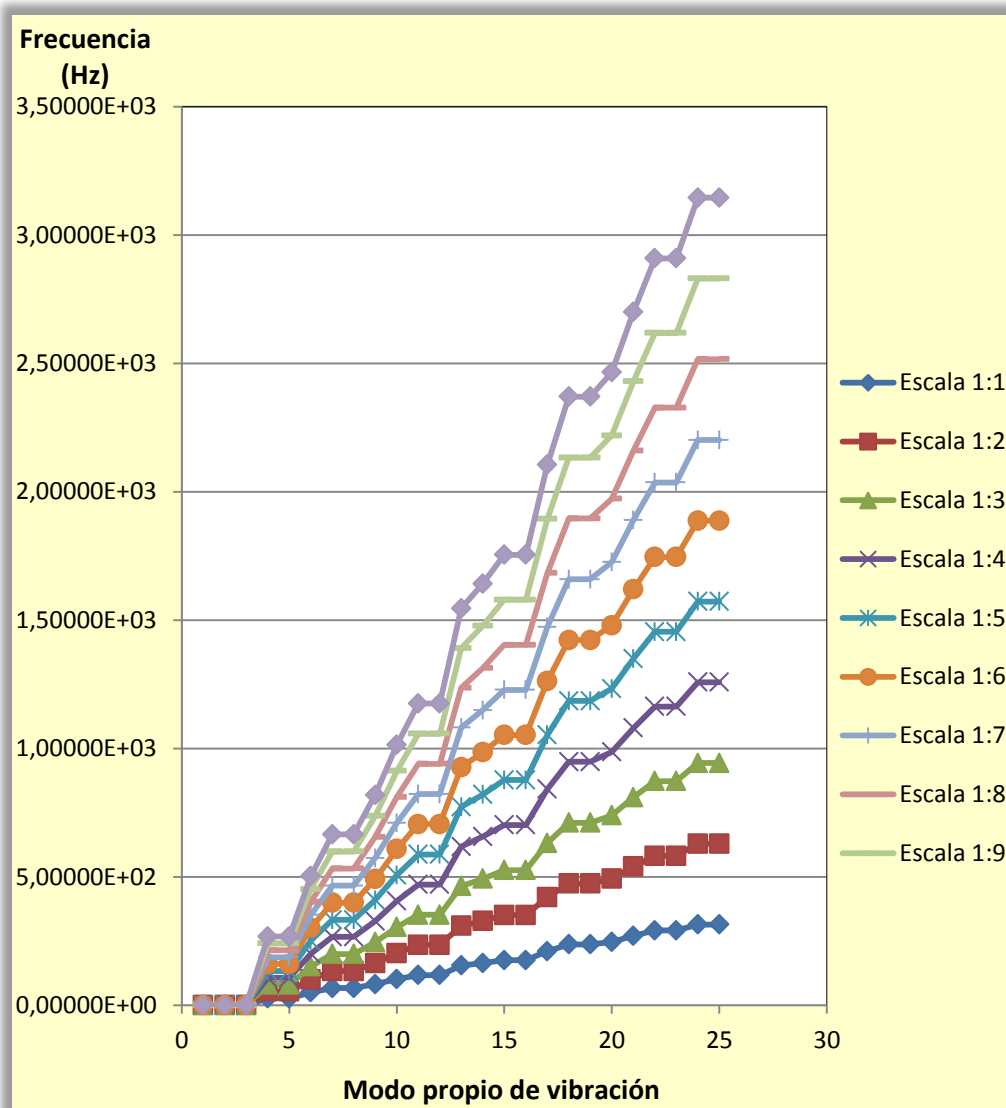


Figura 222. Primeros 25 modos propios de vibración para diferentes escalas. Cilindro libre en el espacio (Acero).

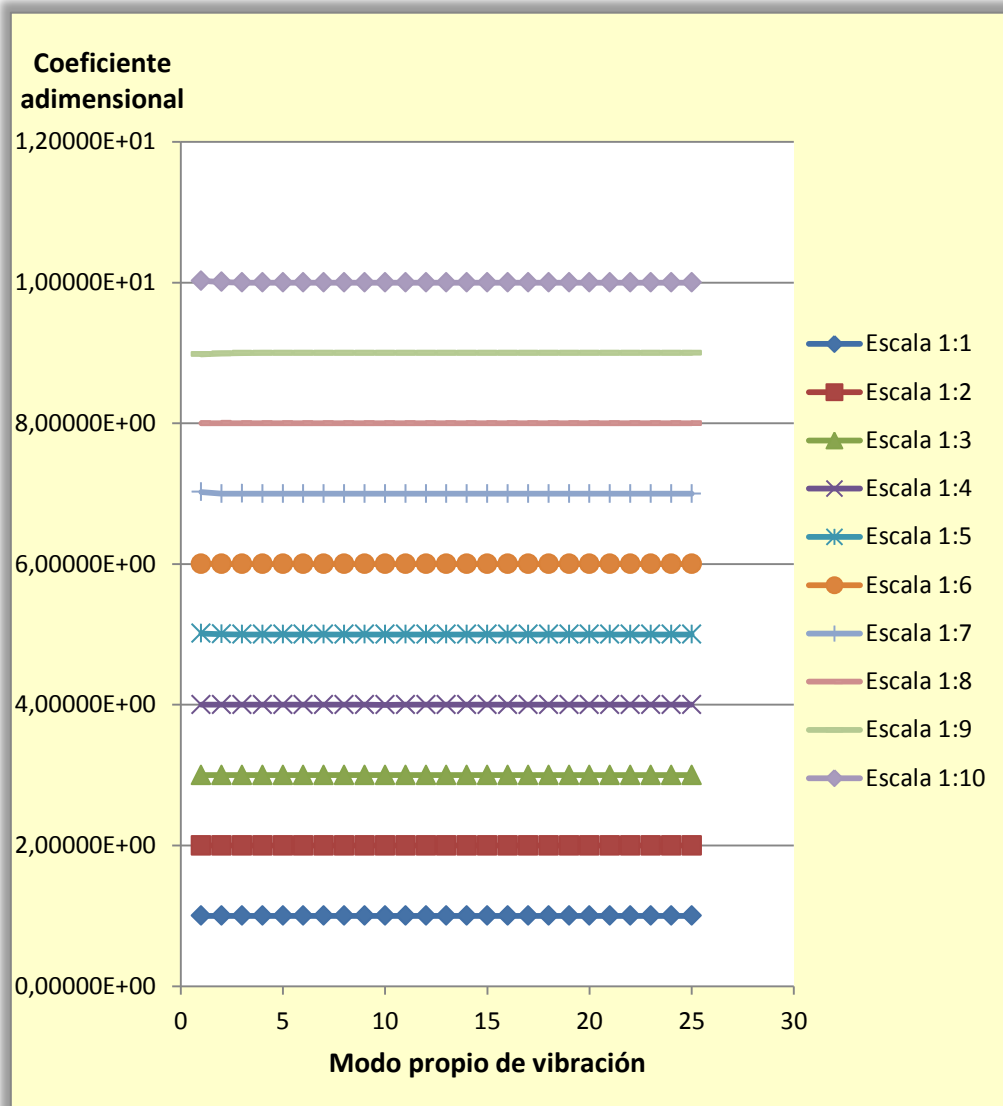


Figura 223. Coeficiente adimensional de los primeros 25 modos propios de vibración de los modelos escalados respecto al modelo 1:1. Cilindro libre en el espacio (Acero).

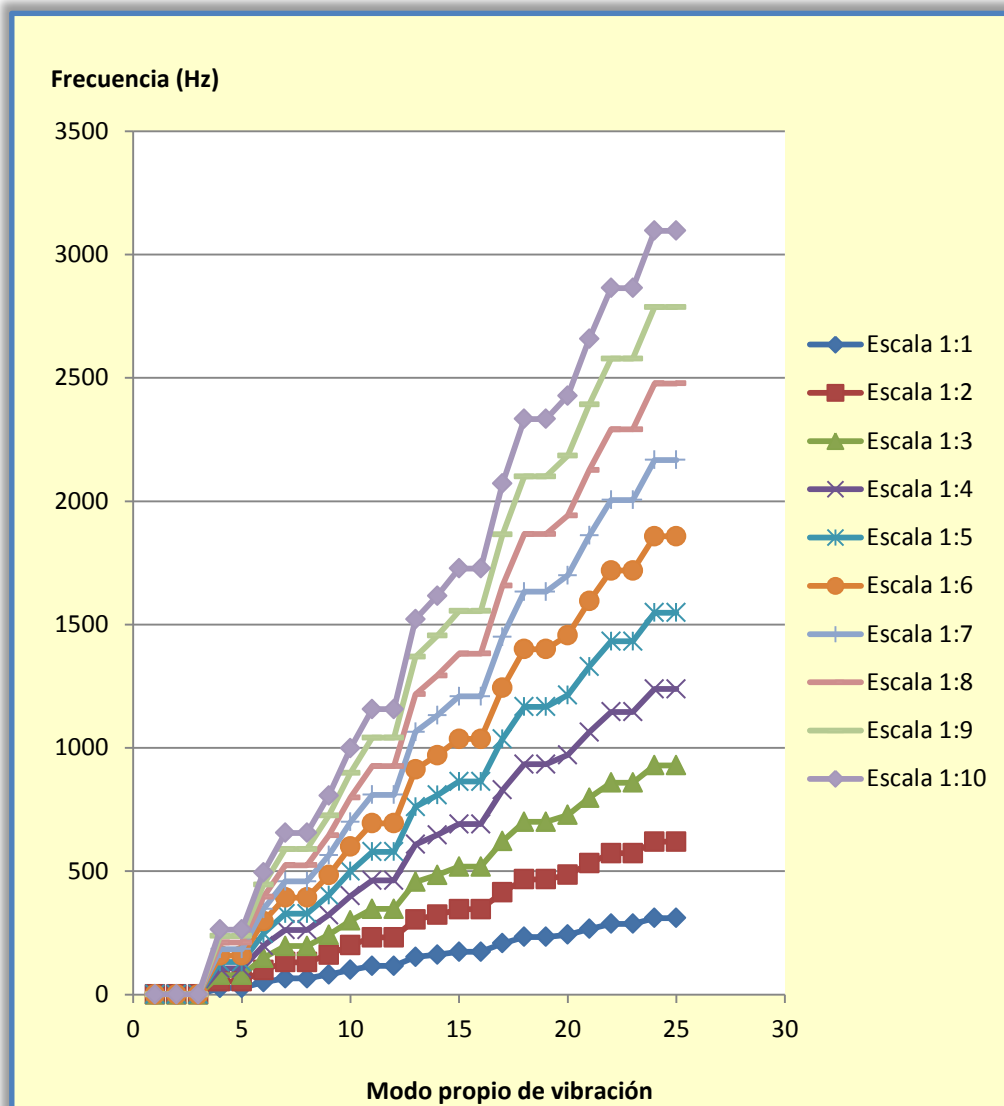


Figura 224. Primeros 25 modos propios de vibración para diferentes escalas. Cilindro libre en el espacio (Aluminio).

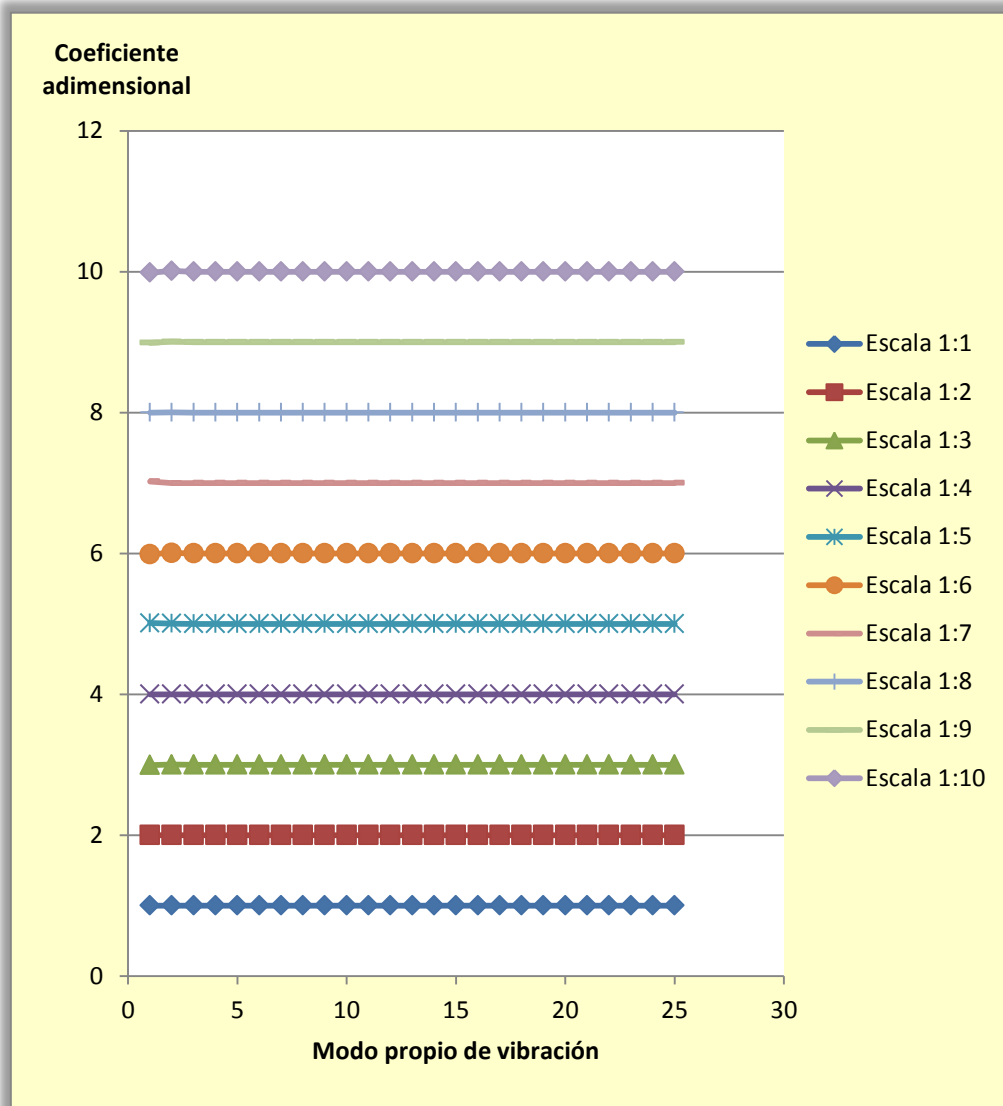


Figura 225. Coeficiente adimensional de los primeros 25 modos propios de vibración de los modelos escalados respecto al modelo 1:1. Cilindro libre en el espacio (Aluminio).

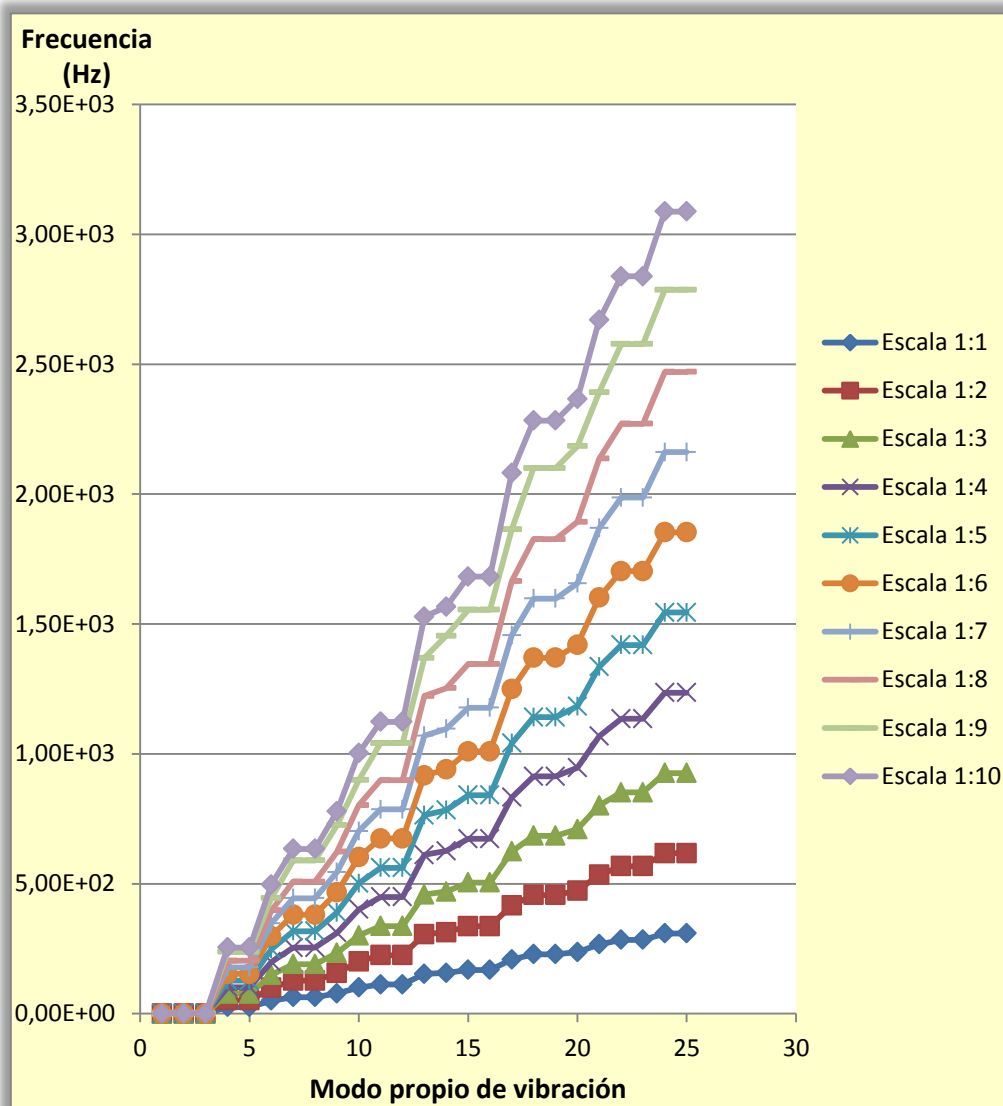


Figura 226. Primeros 25 modos propios de vibración para diferentes escalas. Cilindro libre en el espacio (Hierro colado).

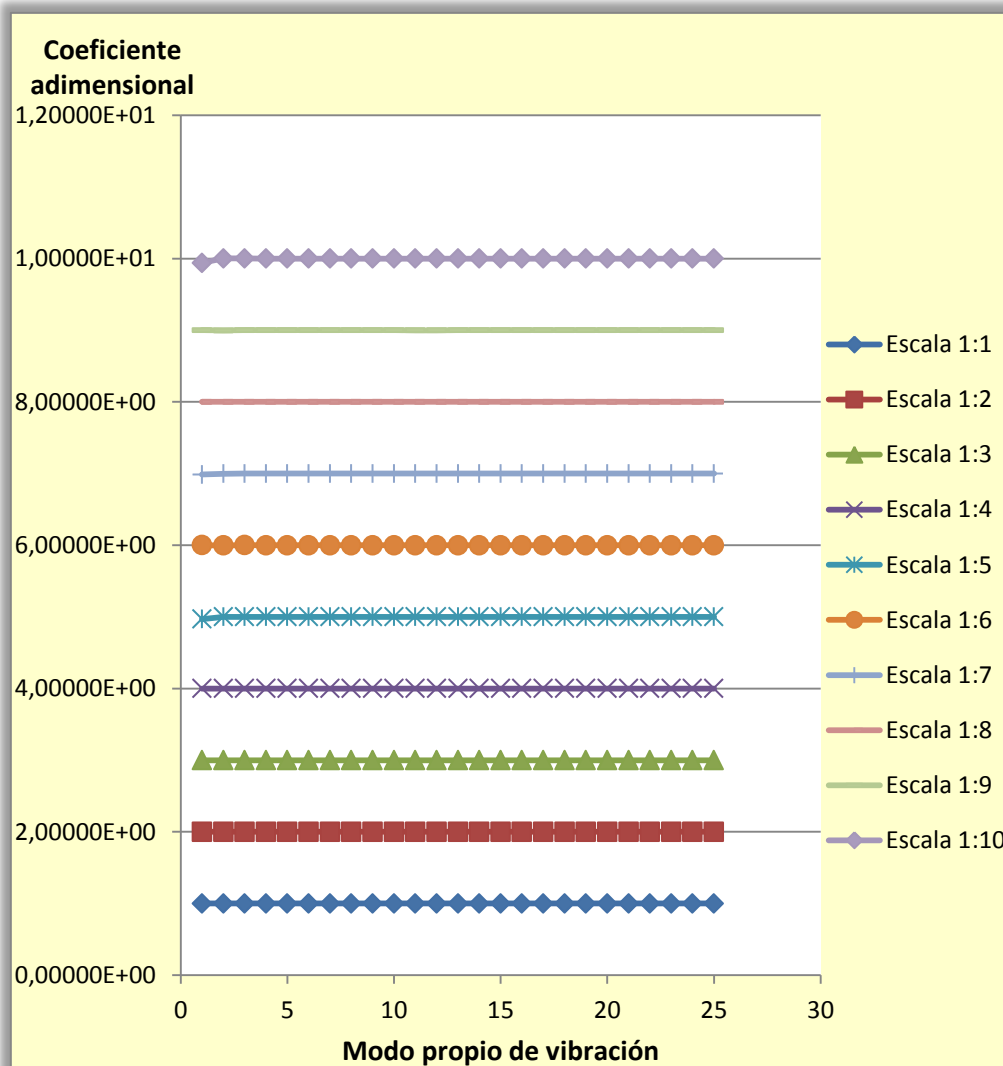


Figura 227. Coeficiente adimensional de los primeros 25 modos propios de vibración de los modelos escalados respecto al modelo 1:1. Cilindro libre en el espacio (Hierro colado).

11.2.3 Análisis adimensional modal de un cilindro empotrado en un lado.

En el segundo caso de análisis adimensional modal se estudia un cilindro empotrado en un lado, tal y como se muestra en la figura 228.

En las figuras 229, 231, y 233 se muestra la evolución de los primeros 25 modos propios de vibración desde escala 1:1 hasta escala 1:10 en los casos de que el cilindro esté constituido por acero, aluminio o hierro colado, respectivamente.

Por su parte, en las figuras 230, 232, y 234 se indica el factor de escala o coeficiente adimensional para cada uno de las situaciones antes mencionadas, estando el cilindro formado por acero, aluminio o hierro colado, respectivamente.

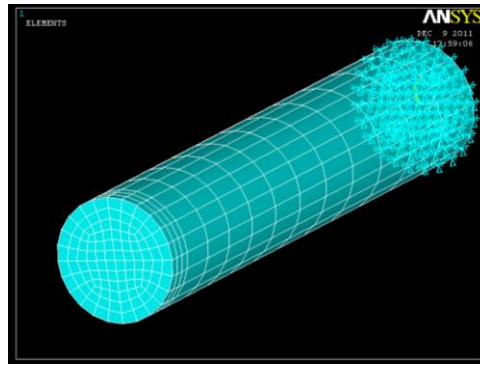


Figura 228. Cilindro empotrado en un lado.

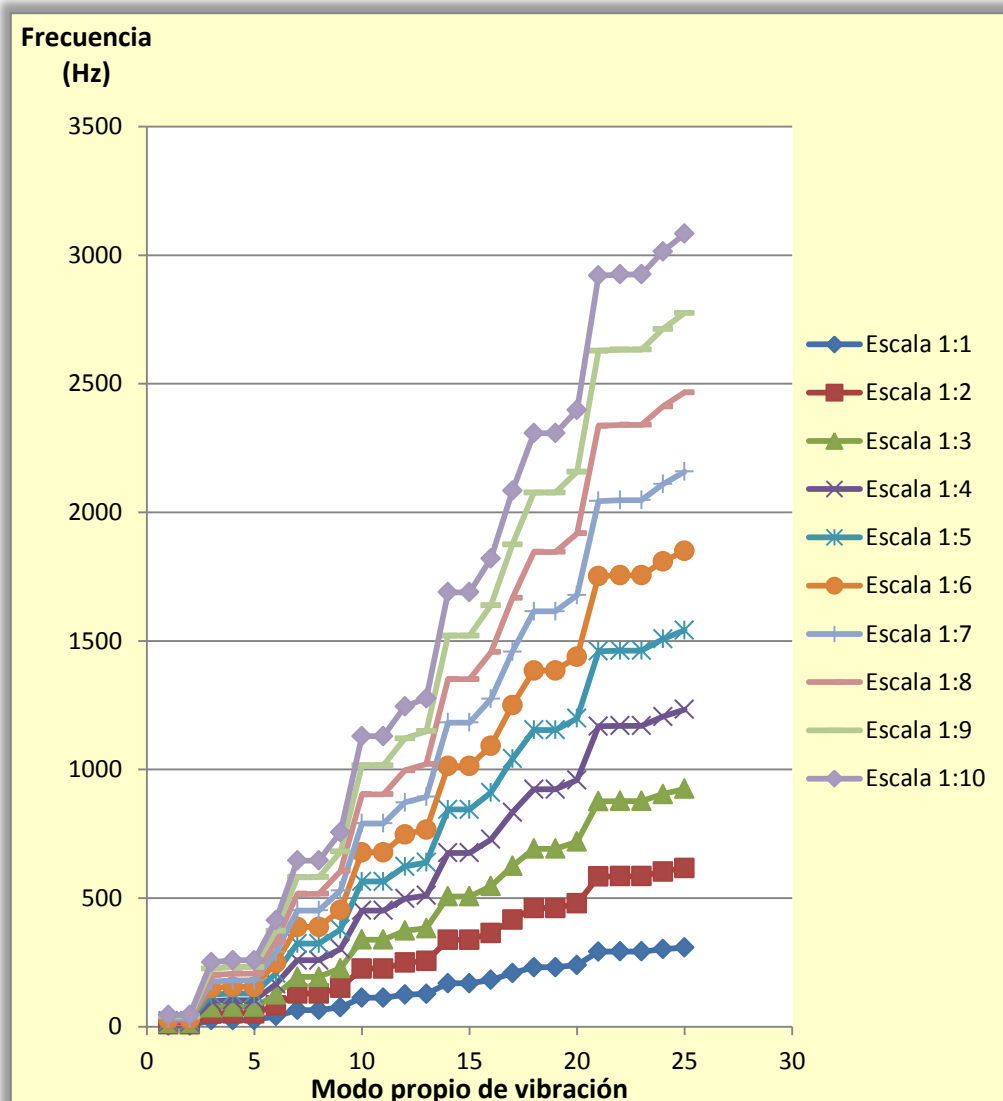


Figura 229. Primeros 25 modos propios de vibración para diferentes escalas. Cilindro empotrado en un lado (Acero).

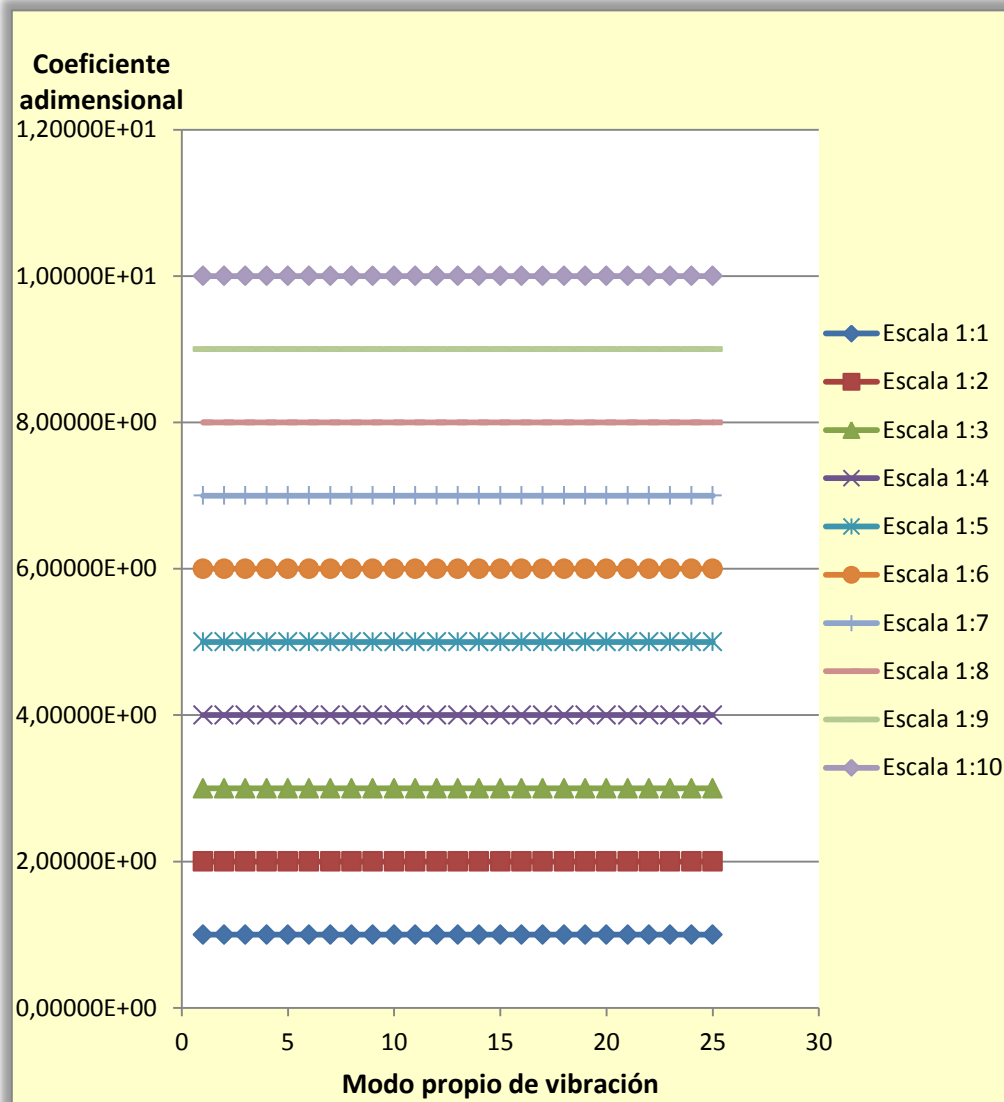


Figura 230. Coeficiente adimensional de los primeros 25 modos propios de vibración de los modelos escalados respecto al modelo 1:1. Cilindro empotrado en un lado (Acero).

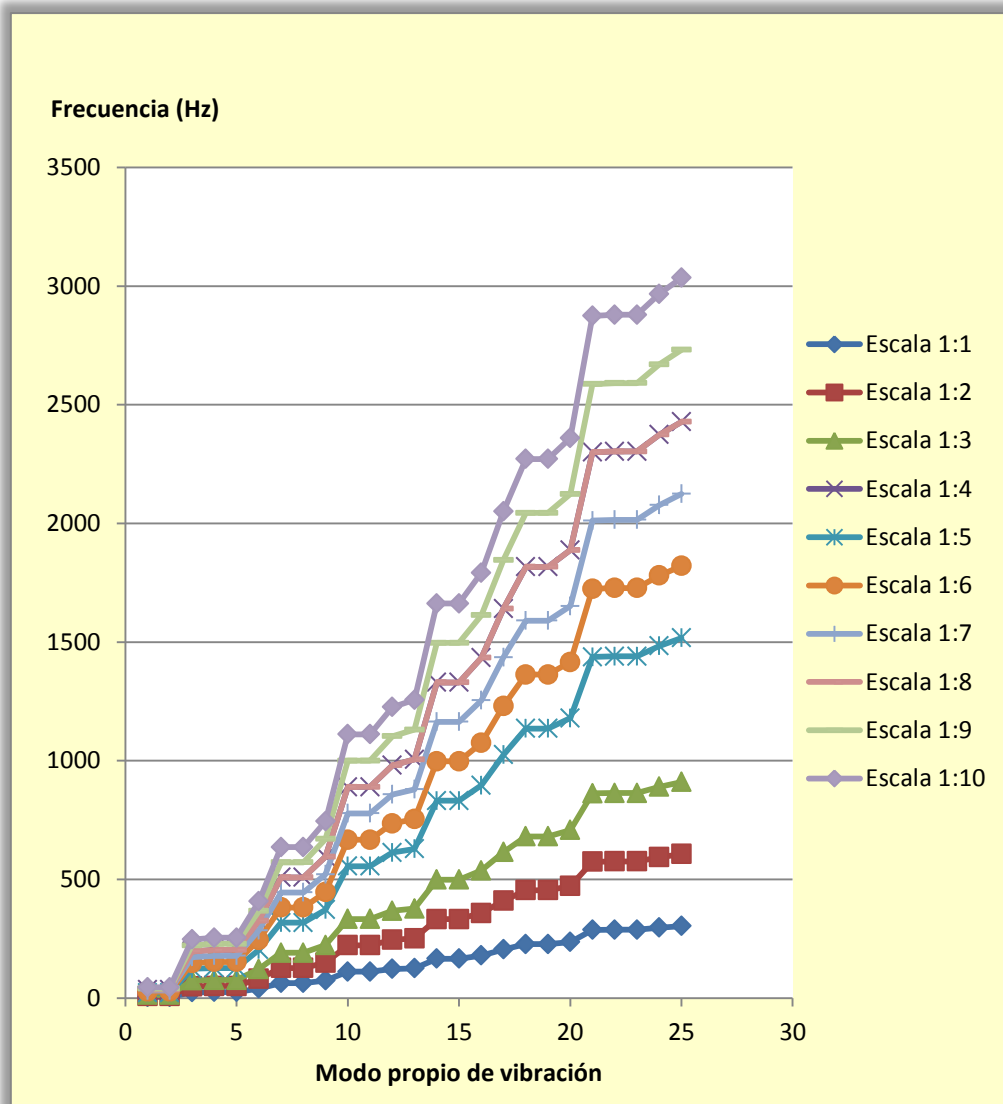


Figura 231. Primeros 25 modos propios de vibración para diferentes escalas. Cilindro empotrado en un lado (Aluminio).

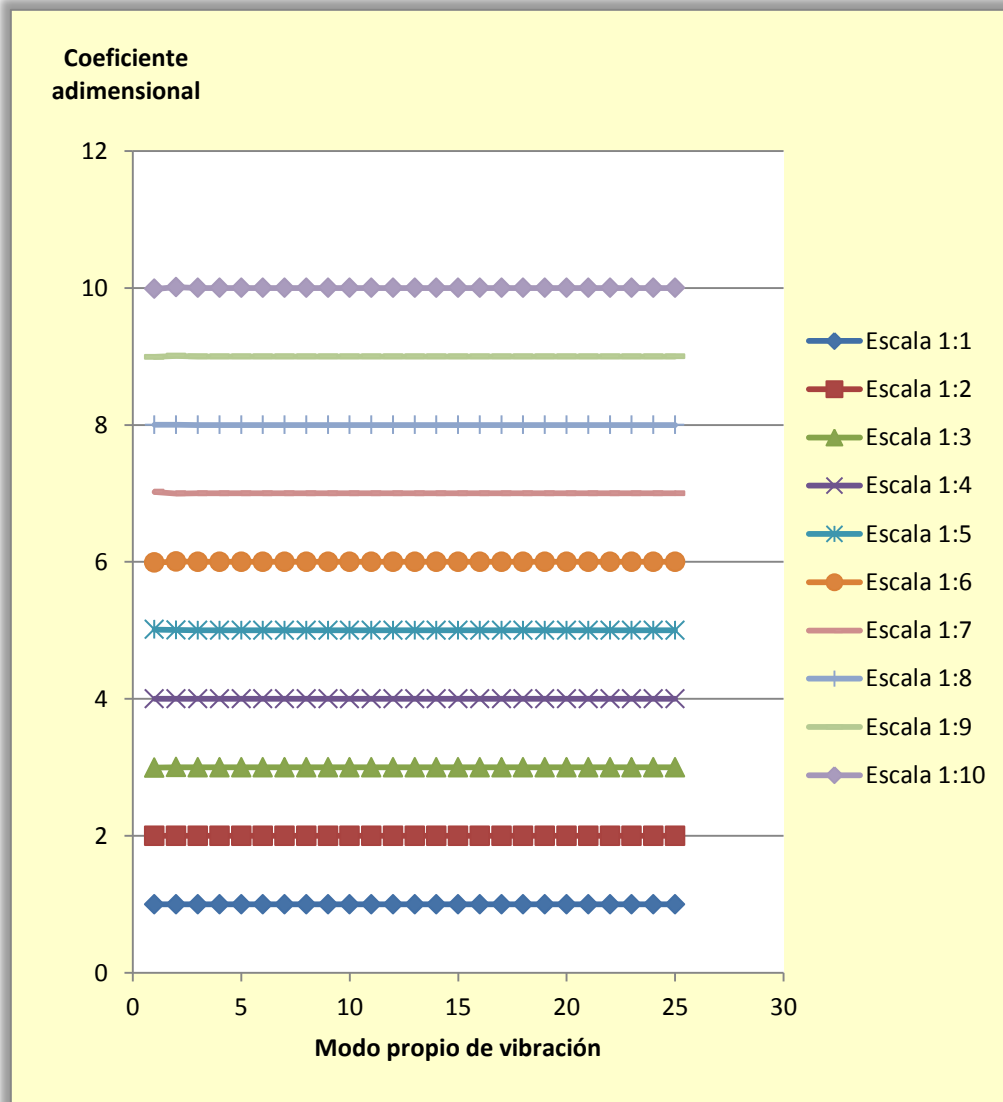


Figura 232. Coeficiente adimensional de los primeros 25 modos propios de vibración de los modelos escalados respecto al modelo 1:1. Cilindro empotrado en un lado (Aluminio).

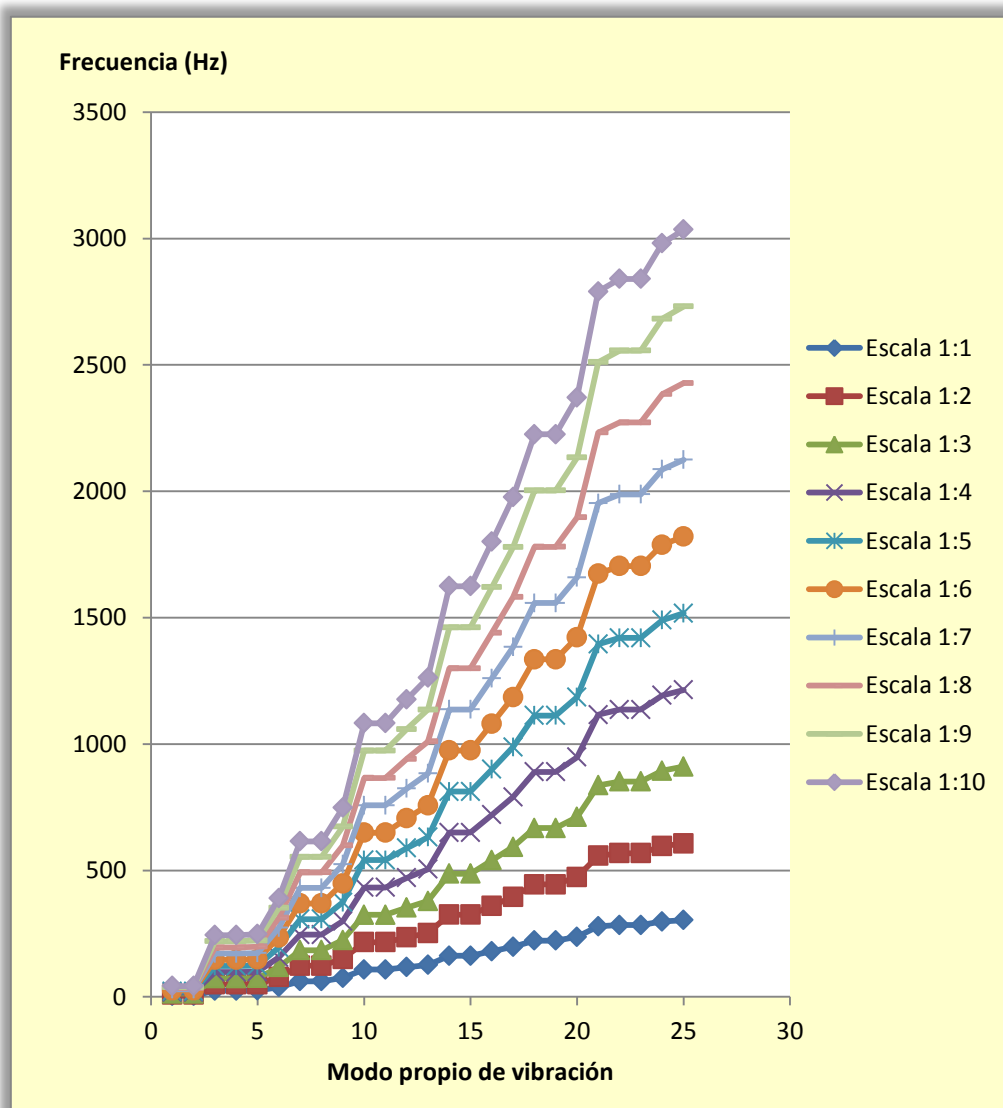


Figura 233. Primeros 25 modos propios de vibración para diferentes escalas. Cilindro empotrado en un lado (Hierro colado).

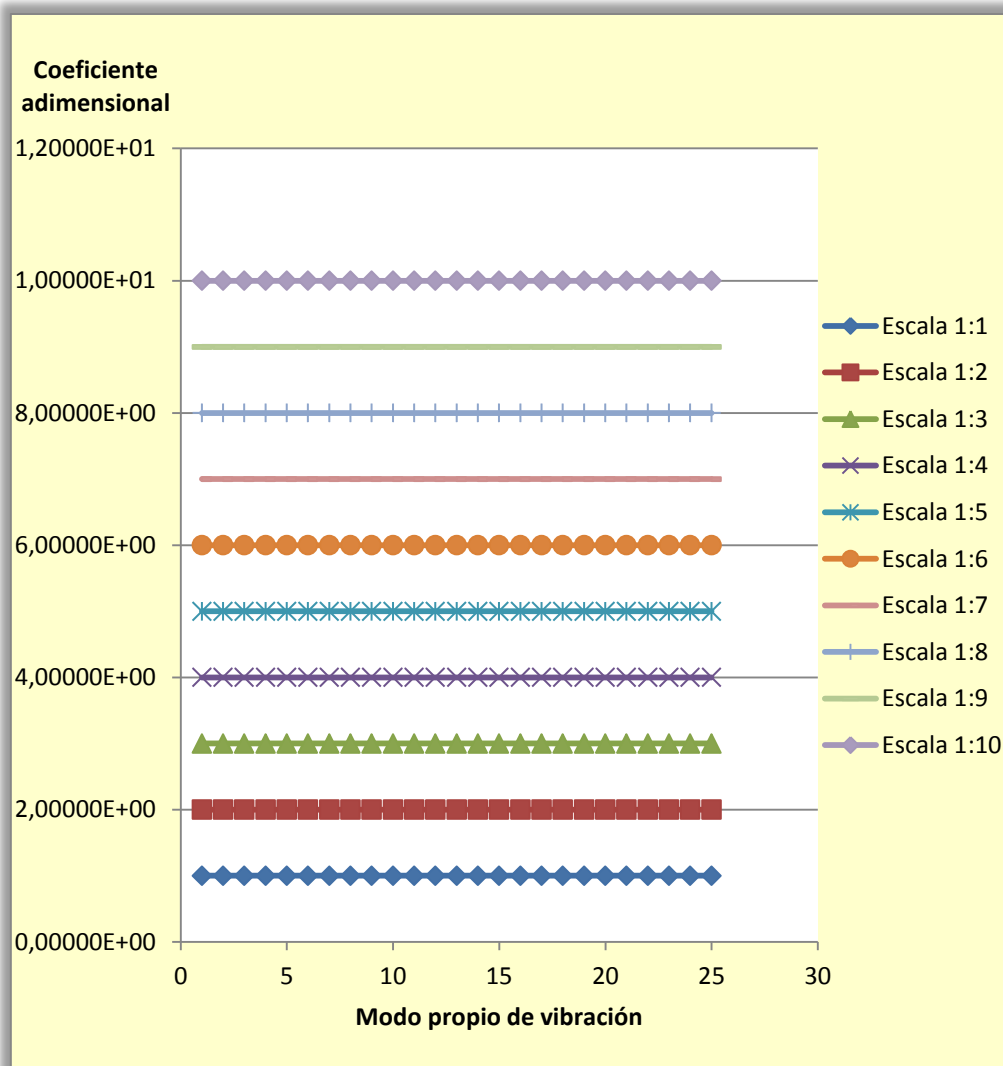


Figura 234 . Coeficiente adimensional de los primeros 25 modos propios de vibración de los modelos escalados respecto al modelo 1:1. Cilindro empotrado en un lado (Hierro colado).

11.2.4 Análisis adimensional modal de un cilindro biempotrado.

En el tercer caso de análisis adimensional modal se estudia un cilindro biempotrado, tal y como se muestra en la figura 235.

En las figuras 236, 238, y 240 se muestra la evolución de los primeros 25 modos propios de vibración desde escala 1:1 hasta escala 1:10 en los casos de que el cilindro esté constituido por acero, aluminio o hierro colado, respectivamente.

Por su parte, en las figuras 237, 239, y 240 se indica el factor de escala o coeficiente adimensional para cada uno de las situaciones antes mencionadas, estando el cilindro formado por acero, aluminio o hierro colado, respectivamente.

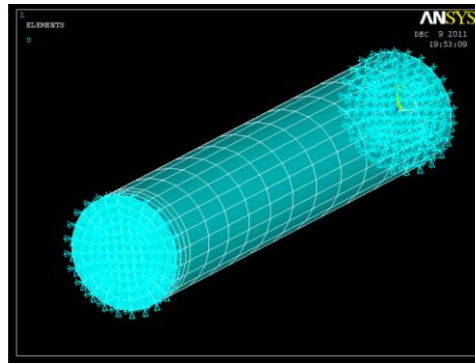


Figura 235. Cilindro biempotrado.

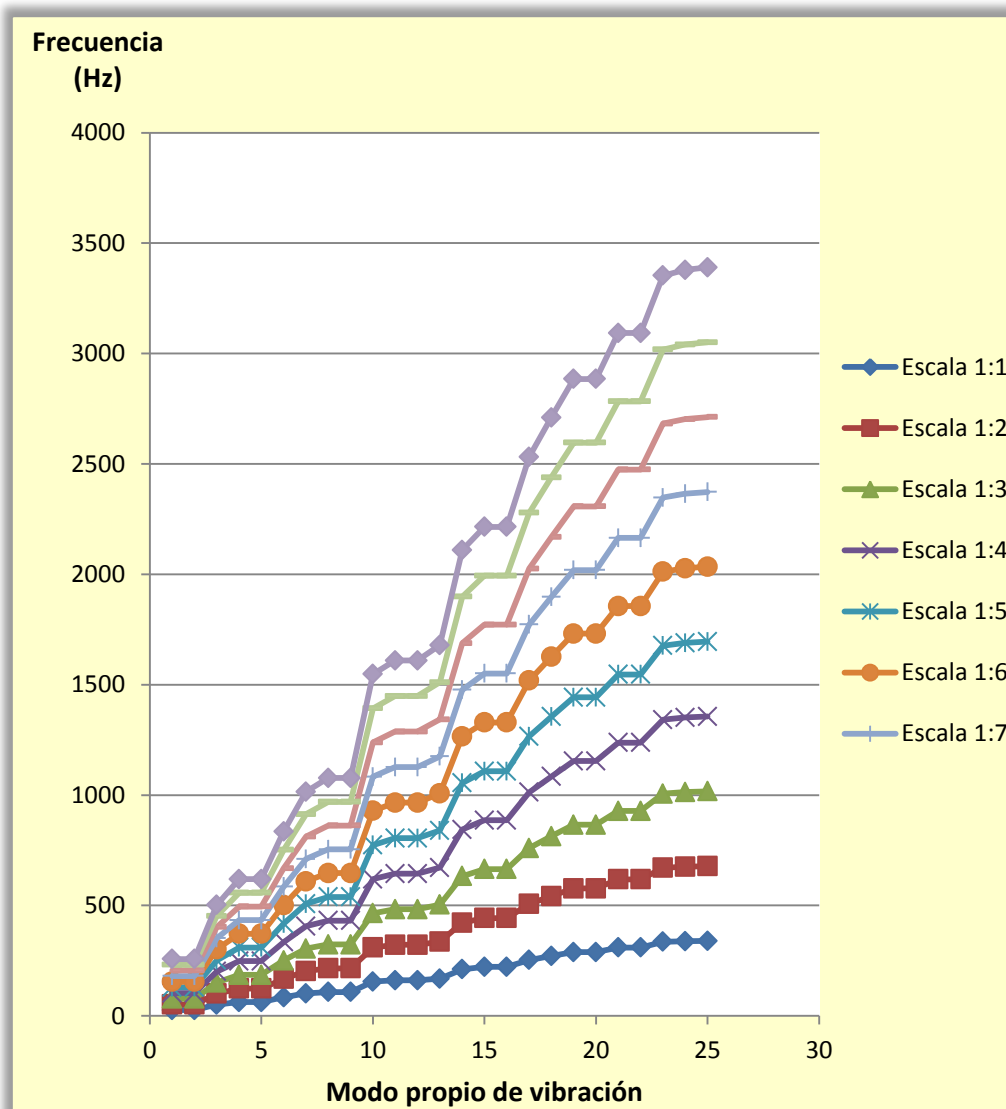


Figura 236. Primeros 25 modos propios de vibración para diferentes escalas. Cilindro biempotrado (Acero).

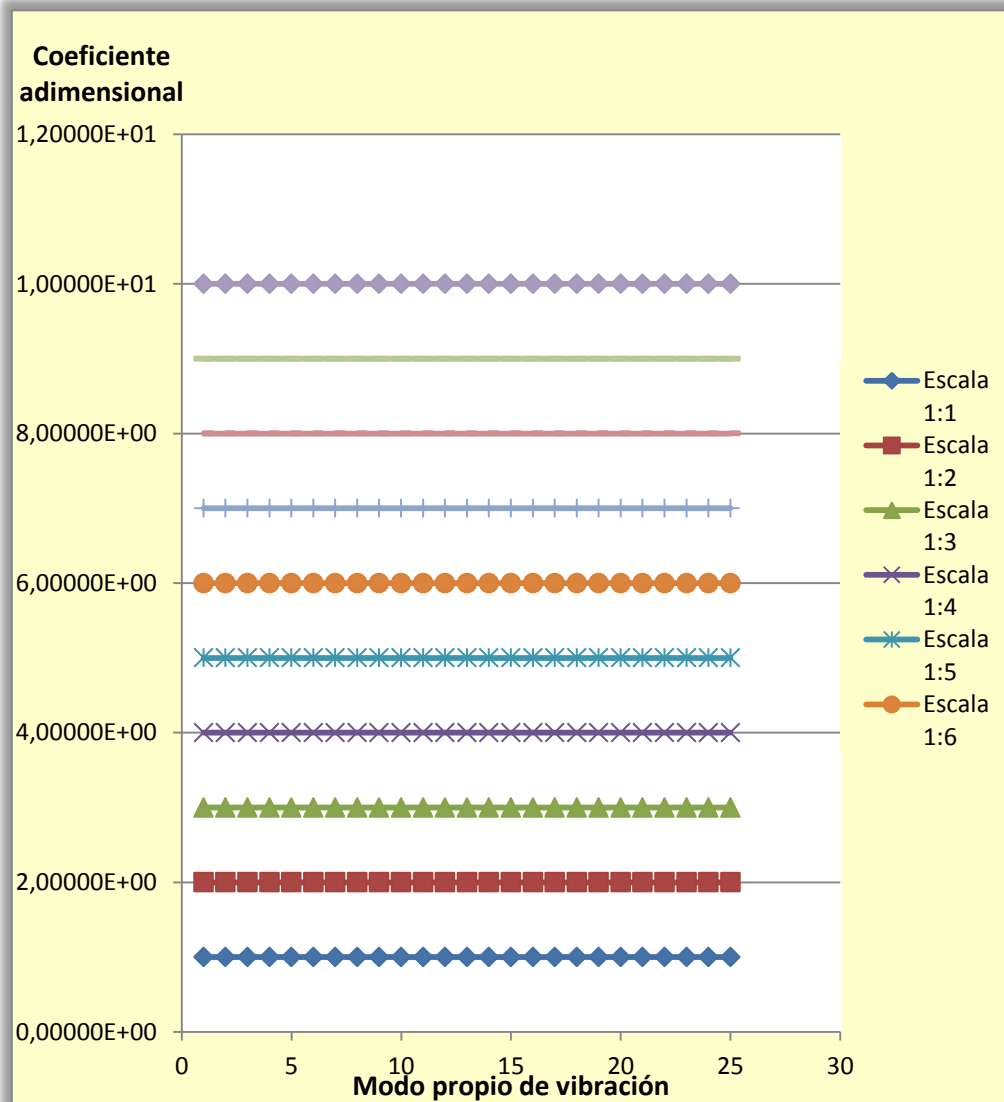


Figura 237. Coeficiente adimensional de los primeros 25 modos propios de vibración de los modelos escalados respecto al modelo 1:1. Cilindro biempotrado (Acero).

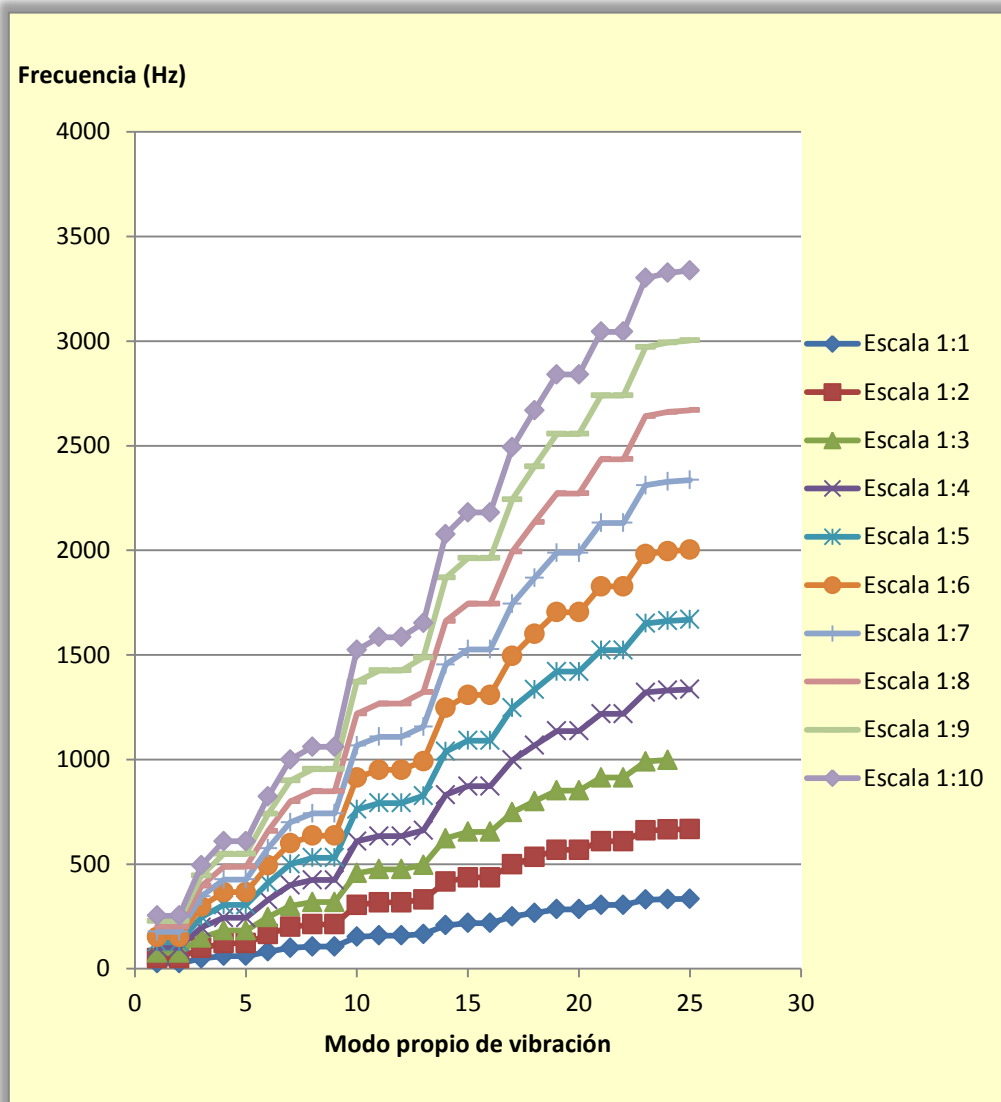


Figura 238. Primeros 25 modos propios de vibración para diferentes escalas. Cilindro biempotrado (Aluminio).

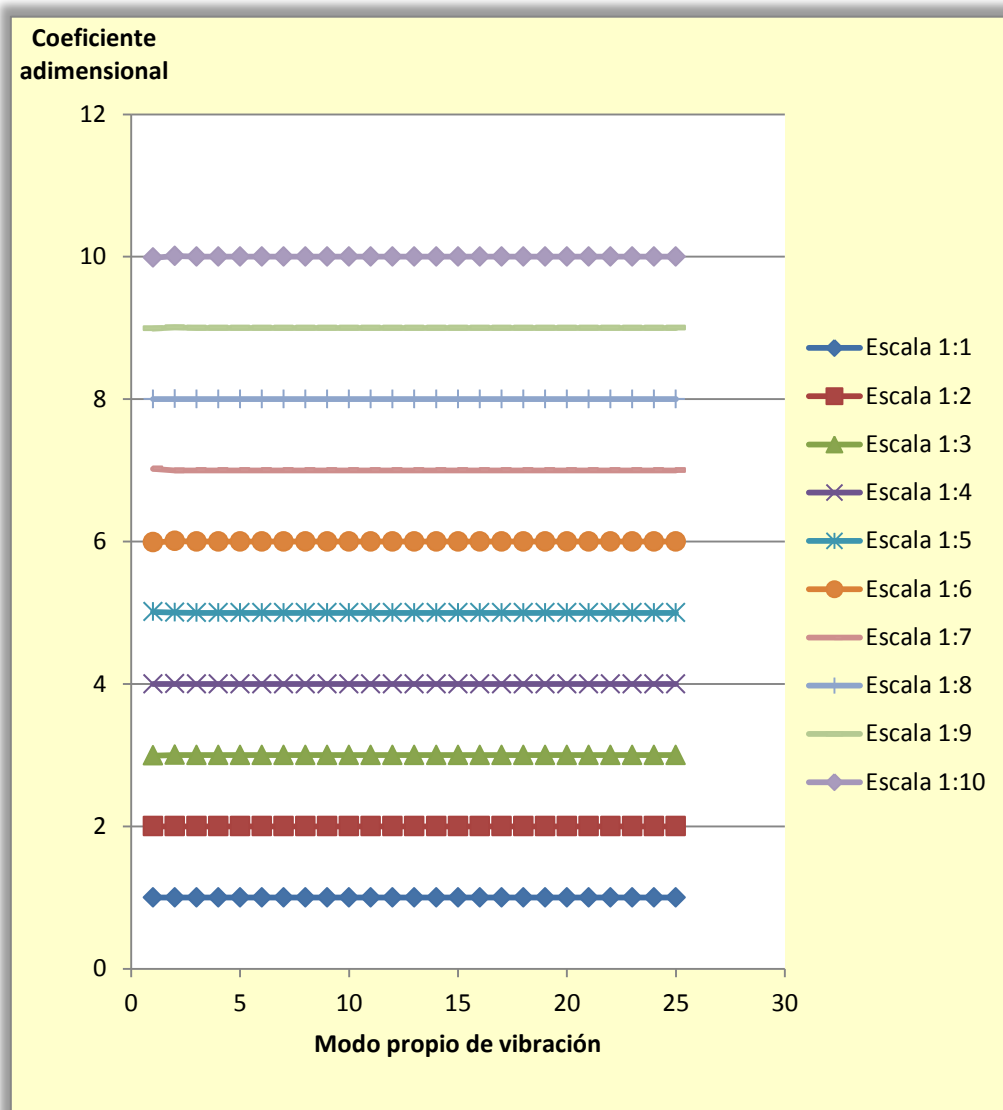


Figura 239. Coeficiente adimensional de los primeros 25 modos propios de vibración de los modelos escalados respecto al modelo 1:1. Cilindro biempotrado (Aluminio).

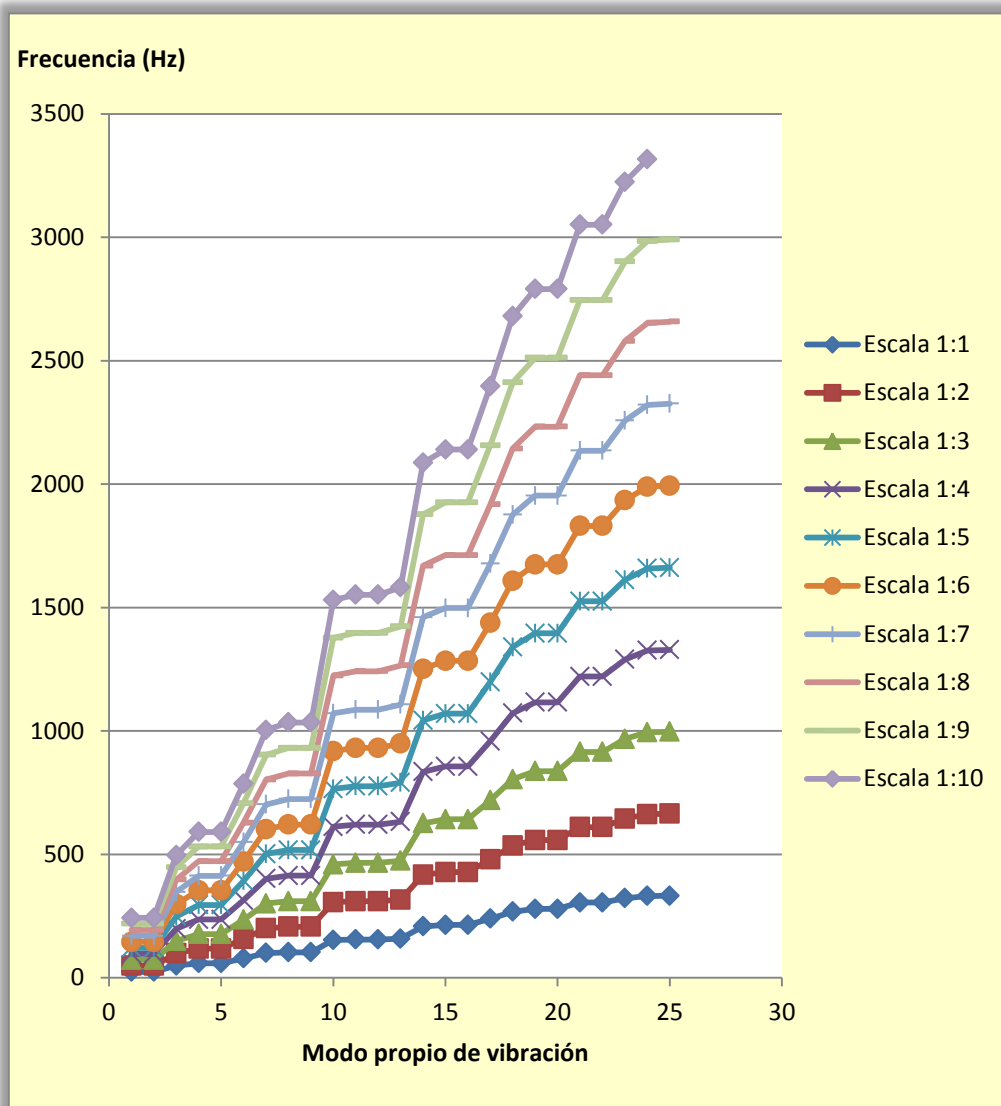


Figura 240. Primeros 25 modos propios de vibración para diferentes escalas. Cilindro biempotrado (Hierro colado).

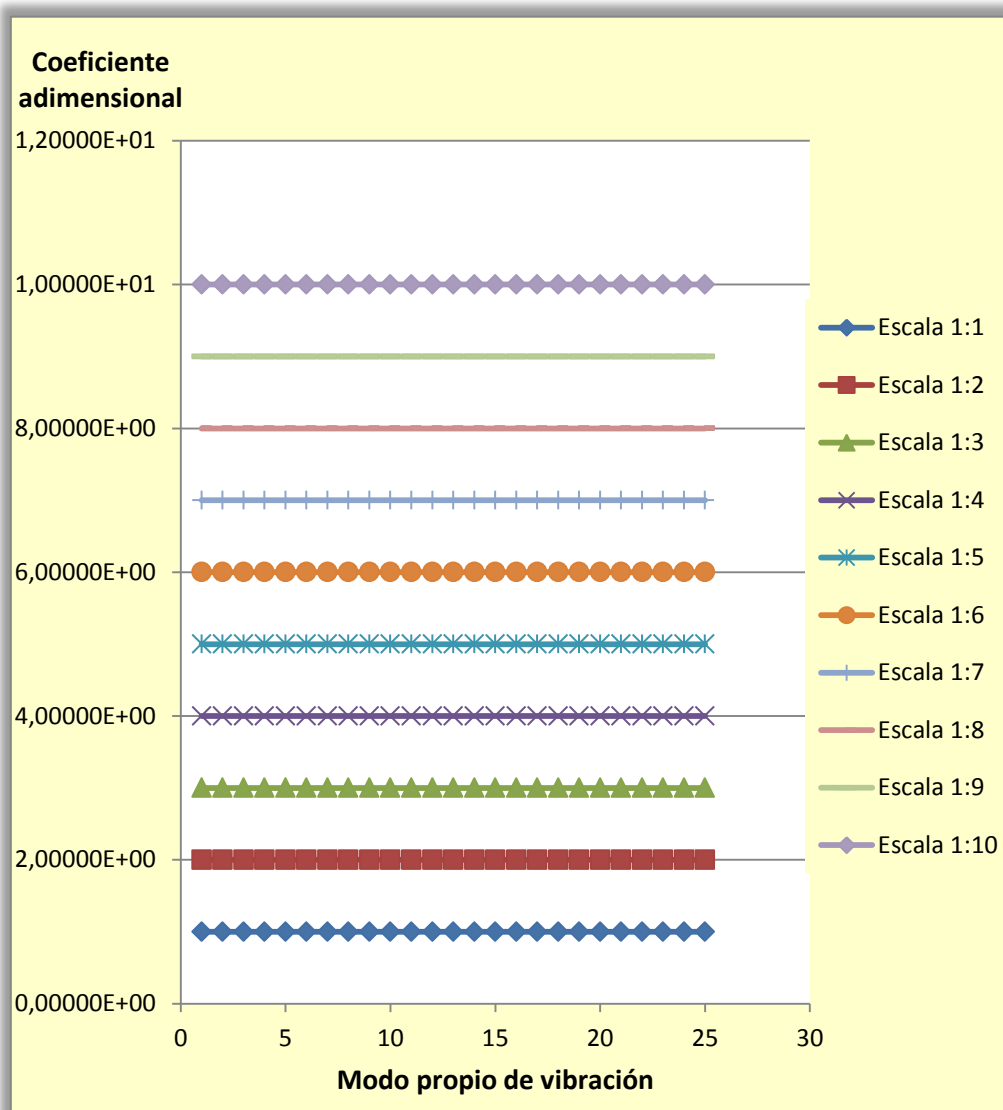


Figura 241. Coeficiente adimensional de los primeros 25 modos propios de vibración de los modelos escalados respecto al modelo 1:1. Cilindro biempotrado (Hierro colado).

11.2.5 Estudio energético de los modos propios de vibración.

Como apunte de interés, en este apartado se desea conocer cuáles serán los modos propios de vibración más energéticos de cada uno de los modelos anteriormente analizados.

Con el modo HARMONIC de ANSYS se aplica una determinada carga constante a distintas frecuencias, pudiéndose obtener los desplazamientos que se producirían al entrar la pieza en resonancia debido a la aplicación de dicha carga a una de las frecuencias de resonancia del modelo.

La frecuencia a la que se produzcan los mayores desplazamientos será la correspondiente al modo propio de vibración más energético.

Hay que tener en cuenta que este estudio no se puede llevar a cabo para el cilindro que se encuentra libre en el espacio, puesto que una carga aplicada sobre él (lo que es necesario para utilizar el modo HARMONIC) conllevaría un desplazamiento infinito.

En las figuras siguientes se muestran los análisis realizados, tal y como se han descrito, para cada uno de los modelos anteriormente estudiados (a escala 1:1), aplicándose una carga en el extremo del cilindro en el caso del cilindro empotrado en un lado (ver figuras 242 y 243) y en la sección media en el caso del cilindro biempotrado (figuras 244 y 245) y tomándose los desplazamientos en dichas secciones. En ambos casos, la carga será vertical hacia abajo.

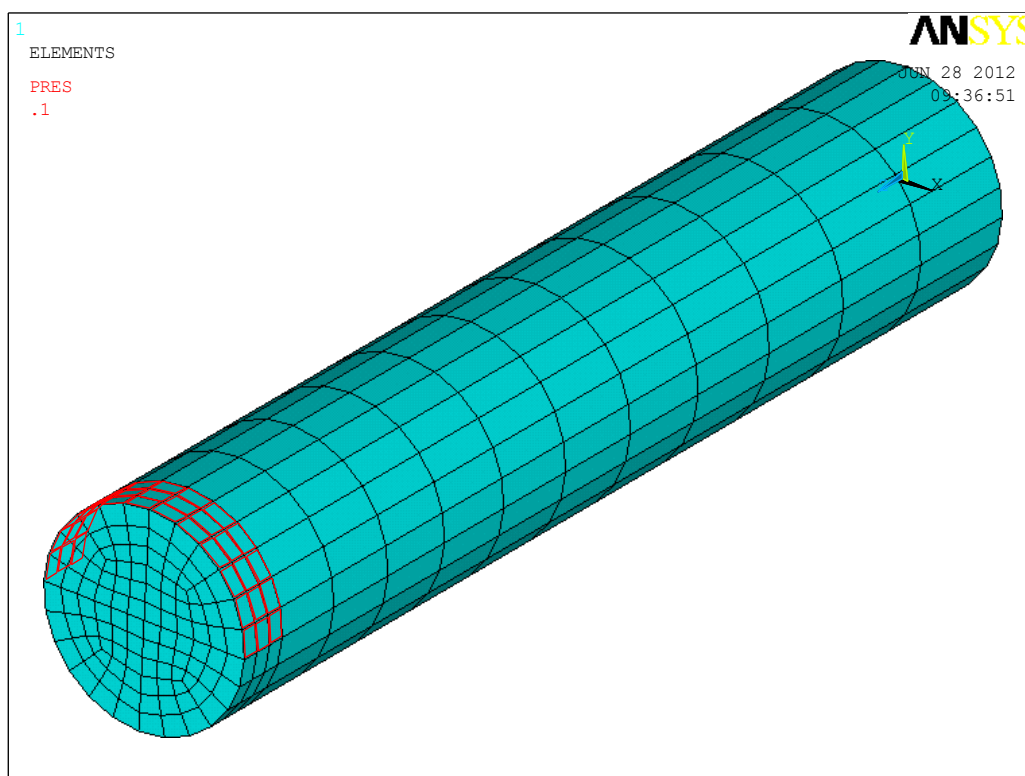


Figura 242. Análisis HARMONIC del cilindro empotrado aplicando una carga vertical hacia abajo de 1000N en el extremo sucesivamente entre 0 y 310Hz (Escala 1:1).

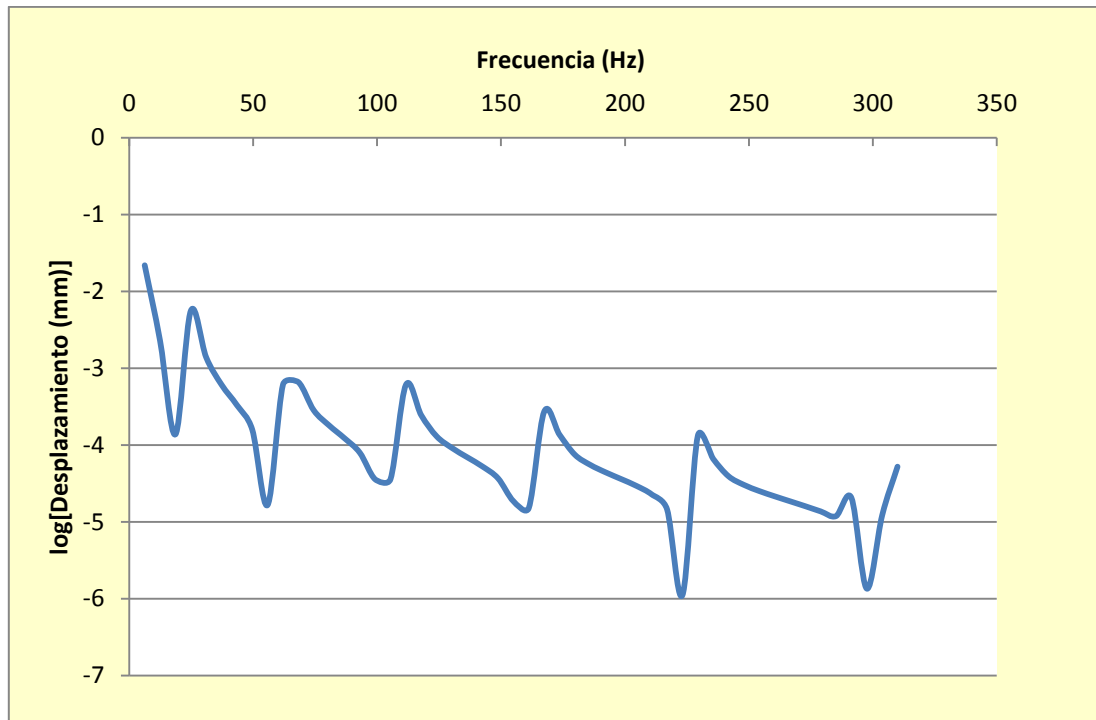


Figura 243. Desplazamientos en el extremo libre del cilindro empotrado en un lado tras la aplicación de una carga vertical hacia abajo de 1000N en dicho extremo sucesivamente entre 0 y 310Hz (Escala 1:1).

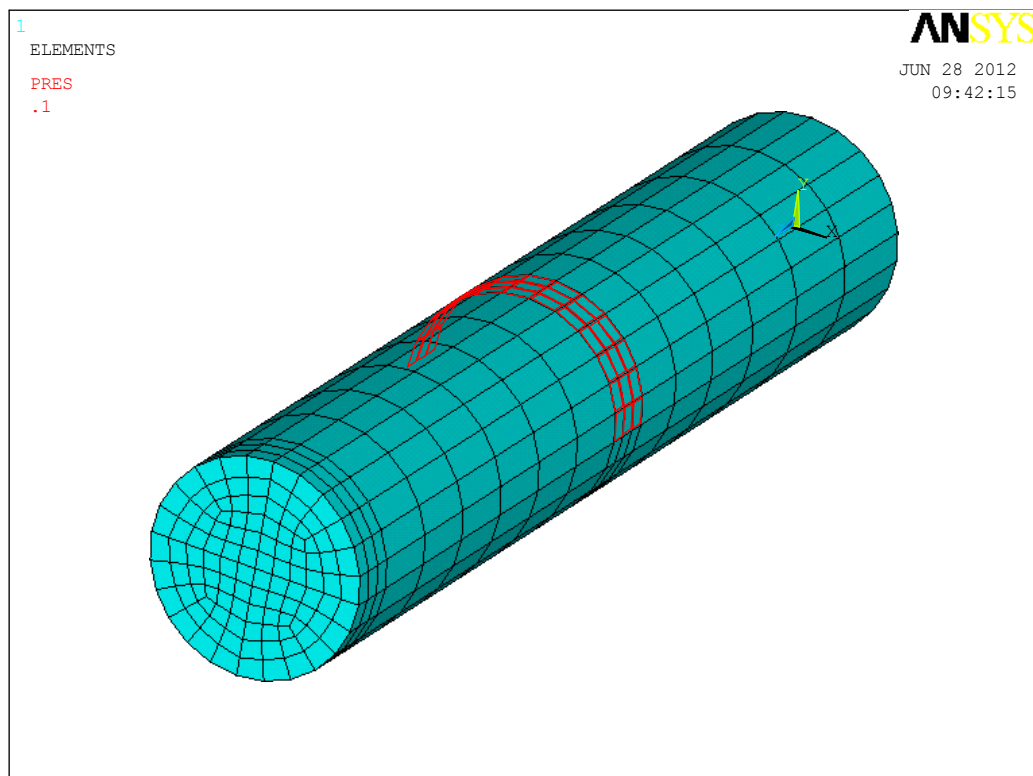


Figura 244. Análisis HARMONIC del cilindro biempotrado aplicando una carga vertical hacia abajo de 1000N en la sección media sucesivamente entre 0 y 340Hz (Escala 1:1).

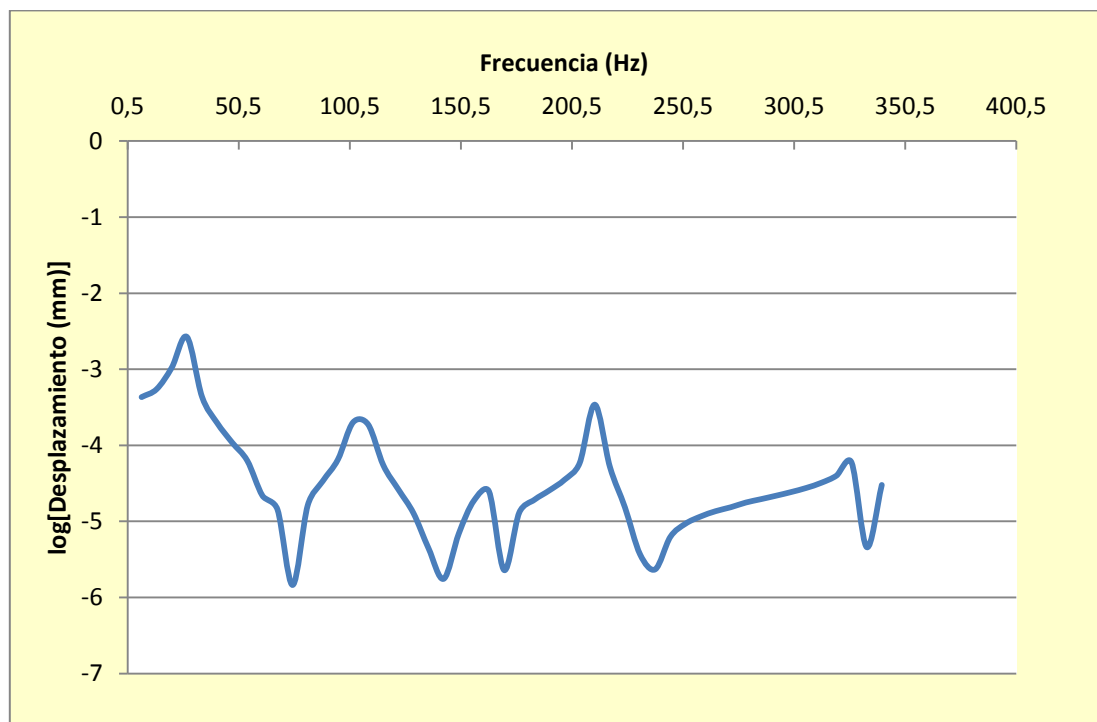


Figura 245. Desplazamientos la sección media del cilindro biempotrado tras la aplicación de una carga vertical hacia abajo de 1000N en dicha sección sucesivamente entre 0 y 340Hz (Escala 1:1).

Para los modelos a escalas diferentes los gráficos de desplazamiento que se obtengan serán equivalentes, variando en magnitud y estando la frecuencia dividida por el factor de escala. Así, en la figura 246, se puede observar como la frecuencia a la que se produce el máximo desplazamiento, es decir, donde se encuentra el modo propio de vibración más energético, se encuentra multiplicada aproximadamente por 5 respecto de la figura 245, habiendo utilizado, para el estudio correspondiente a dicha figura, el modelo del cilindro biempotrado a escala 1:5.

Es importante tener en cuenta que este análisis es útil cuando se conoce, aproximadamente, el sistema de carga al que está sometido el conjunto mecánico que corresponda, ya que, utilizando el método HARMONIC, la entrada en resonancia del mismo también depende, como se habrá podido deducir, del tipo de carga que se esté aplicando. Esto puede comprobarse en la figura 247, donde se ha llevado a cabo el mismo análisis que el correspondiente a la figura 243, pero aplicando la carga perpendicularmente a como se hizo en el mismo.

En ese caso concreto (figura 247), debido a la sencillez del modelo, el modo propio de vibración más energético es el mismo que en el caso de la figura 243, variando sólo la magnitud del desplazamiento que se produce durante la resonancia; sin embargo, en modelos complejos, habrá que tener en cuenta esta particularidad.

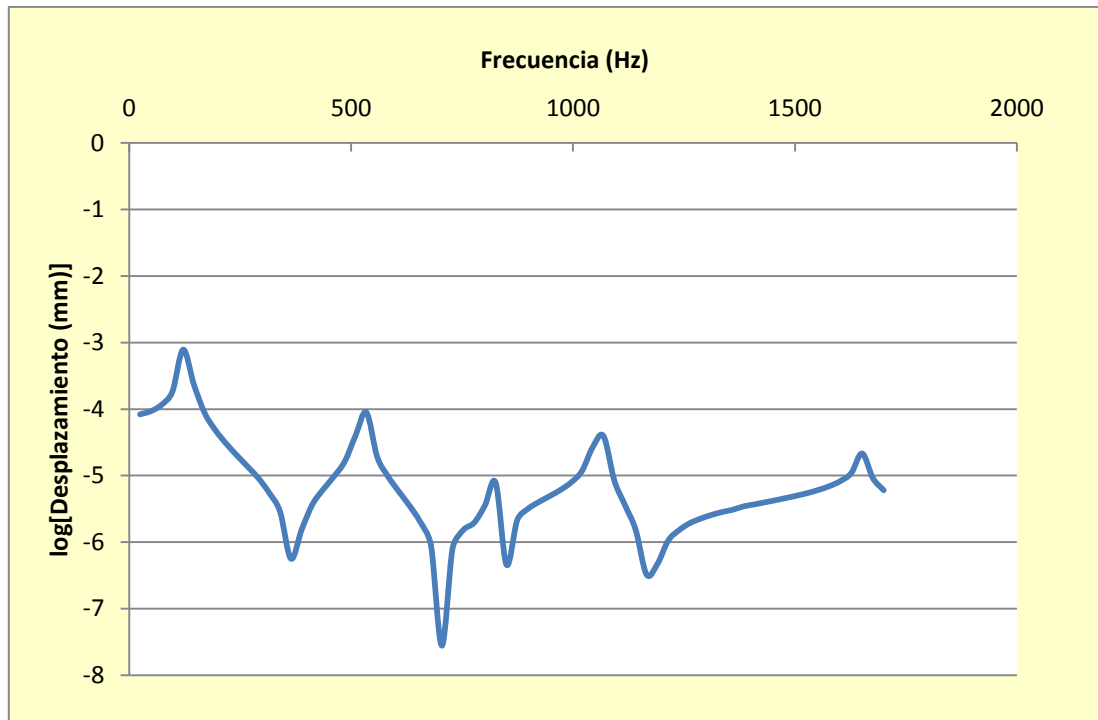


Figura 246. Desplazamientos la sección media del cilindro biempotrado tras la aplicación de una carga vertical hacia abajo de 40N en dicha sección sucesivamente entre 100 y 1700Hz (Escala 1:5).

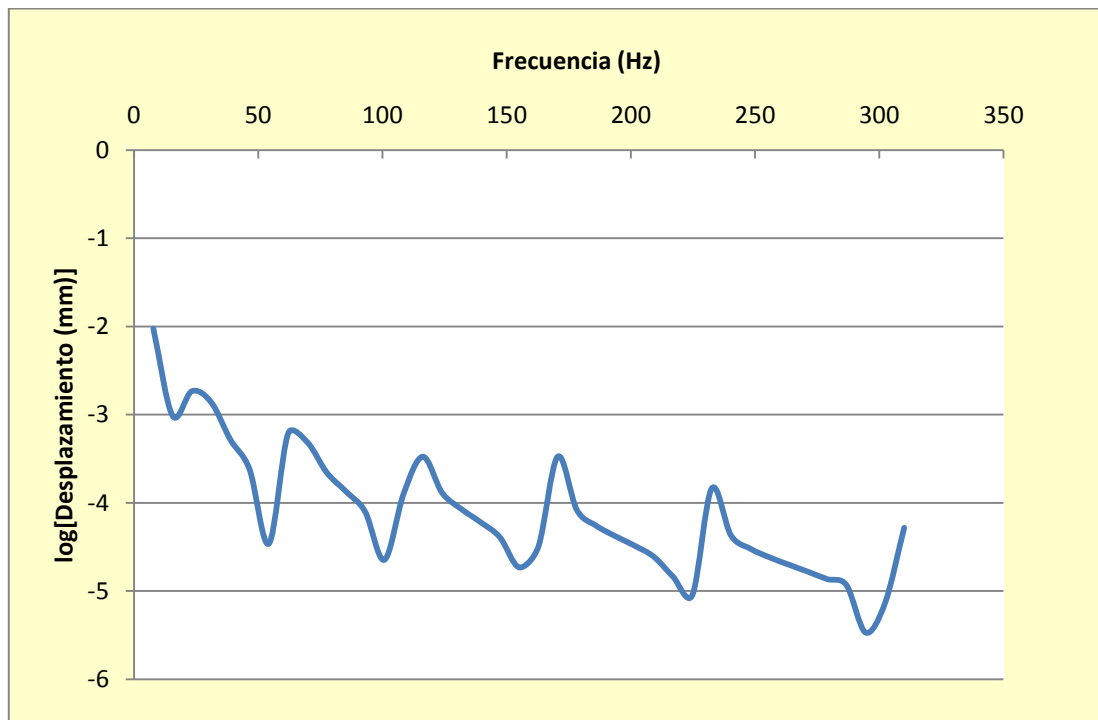


Figura 247. Desplazamientos en el extremo libre del cilindro empotrado en un lado tras la aplicación de una carga horizontal de 1000N en dicho extremo sucesivamente entre 0 y 310Hz (Escala 1:1).

11.2.6 Relación entre modos propios de vibración de acero y aluminio.

En aquellos modelos en los que se han calculado los modos propios de vibración se ha obtenido la relación existente entre aquellos modos correspondientes a cilindros de acero y aluminio (en las tablas 19 y 20 se muestran, como ejemplo los casos del cilindro libre en el espacio y el cilindro biempotrado), resultando lo indicado en (11.1):

$$p = \frac{\text{Modo propio de vibración}_{\text{acero}}}{\text{Modo propio de vibración}_{\text{aluminio}}} = 1,0158 \quad (11.1)$$

Tabla 19. Relación entre modos propios de vibración de modelos escalados de acero y aluminio (Modelo libre).

Relación entre modos propios de modelos escalados de acero y aluminio (Modelo libre)										
ESCALA	1:1	1:2	1:3	1:4	1:5	1:6	1:7	1:8	1:9	1:10
Modo propio de vibración	1,0000	0,5000	0,3333	0,2500	0,2000	0,1667	0,1429	0,1250	0,1111	0,1000
1	1,0154	1,0156	1,0176	1,0156	1,0195	1,0176	1,0148	1,0156	1,0141	1,0195
2	1,0162	1,0162	1,0153	1,0162	1,0160	1,0153	1,0150	1,0162	1,0145	1,0160
3	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0157	1,0158	1,0159	1,0158	1,0158	1,0157
4	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
5	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
6	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
7	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
8	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
9	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
10	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
11	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
12	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
13	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
14	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
15	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
16	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
17	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
18	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
19	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
20	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
21	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
22	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
23	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
24	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
25	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158

Tabla 20. Relación entre modos propios de vibración de modelos escalados de acero y aluminio (Modelo biempotrado).

Relación entre modos propios de modelos escalados de acero y aluminio (Modelo biempotrado)										
ESCALA	1:1	1:2	1:3	1:4	1:5	1:6	1:7	1:8	1:9	1:10
Modo propio de vibración	1,0000	0,5000	0,3333	0,2500	0,2000	0,1667	0,1429	0,1250	0,1111	0,1000
1	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
2	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
3	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
4	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
5	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
6	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
7	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
8	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
9	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
10	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
11	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
12	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
13	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
14	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
15	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
16	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
17	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
18	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
19	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
20	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
21	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
22	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
23	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
24	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158
25	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158	1,0158

Buscándose el motivo de esta relación se ha podido comprobar que, empíricamente resulta la expresión (11.2), siendo $E_{acero} = 210GPa$, $E_{aluminio} = 70GPa$, $\rho_{aluminio} = 2700kg/m^3$, $\rho_{acero} = 7850kg/m^3$:

$$p = \sqrt{\frac{E_{acero} \cdot \rho_{aluminio}}{E_{aluminio} \cdot \rho_{acero}}} = \sqrt{\frac{210 \cdot 2700}{70 \cdot 7850}} = 1,01579877 \quad (11.2)$$

11.2.7 Relación entre modos propios de vibración de acero y hierro colado.

En aquellos modelos en los que se han calculado los modos propios de vibración se ha obtenido la relación existente entre aquellos modos correspondientes a cilindros de acero y hierro colado (en las tablas 21 y 22 se muestran, como ejemplo los casos del cilindro libre en el espacio y el cilindro biempotrado), resultando que, en este caso, dicha dependencia permanece constante para diferentes escalas pero no para diferentes modos propios de vibración; lo mismo ocurriría comparando los modelos de aluminio y hierro colado.

Tabla 21. Relación entre modos propios de vibración de modelos escalados de acero y hierro colado (Modelo libre).

Relación entre modos propios de modelos escalados de acero y hierro colado (Modelo libre)										
ESCALA	1:1	1:2	1:3	1:4	1:5	1:6	1:7	1:8	1:9	1:10
Modo propio de vibración	1,0000	0,5000	0,3333	0,2500	0,2000	0,1667	0,1429	0,1250	0,1111	0,1000
1	1,4038	1,4039	1,4041	1,4039	1,4158	1,4041	1,4109	1,4039	1,4004	1,4158
2	0,7169	0,7170	0,7173	0,7170	0,7173	0,7173	0,7169	0,7170	0,7165	0,7173
3	1,0582	1,0582	1,0581	1,0582	1,0581	1,0581	1,0582	1,0582	1,0581	1,0581
4	1,0515	1,0515	1,0515	1,0515	1,0515	1,0515	1,0515	1,0515	1,0515	1,0515
5	1,0515	1,0515	1,0515	1,0515	1,0515	1,0515	1,0515	1,0515	1,0515	1,0515
6	1,0111	1,0111	1,0112	1,0112	1,0112	1,0111	1,0111	1,0112	1,0111	1,0111
7	1,0489	1,0489	1,0489	1,0489	1,0489	1,0489	1,0489	1,0489	1,0489	1,0489
8	1,0489	1,0489	1,0489	1,0489	1,0489	1,0489	1,0489	1,0489	1,0489	1,0489
9	1,0518	1,0518	1,0518	1,0518	1,0518	1,0518	1,0518	1,0518	1,0518	1,0518
10	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112
11	1,0462	1,0462	1,0462	1,0462	1,0462	1,0462	1,0462	1,0462	1,0462	1,0462
12	1,0462	1,0462	1,0462	1,0462	1,0462	1,0462	1,0462	1,0462	1,0462	1,0462
13	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112
14	1,0484	1,0484	1,0484	1,0484	1,0484	1,0484	1,0484	1,0484	1,0484	1,0484
15	1,0430	1,0430	1,0430	1,0430	1,0430	1,0430	1,0430	1,0430	1,0430	1,0430
16	1,0430	1,0430	1,0430	1,0430	1,0430	1,0430	1,0430	1,0430	1,0430	1,0430
17	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112
18	1,0382	1,0382	1,0382	1,0382	1,0382	1,0382	1,0382	1,0382	1,0382	1,0382
19	1,0382	1,0382	1,0382	1,0382	1,0382	1,0382	1,0382	1,0382	1,0382	1,0382
20	1,0420	1,0420	1,0420	1,0420	1,0420	1,0420	1,0420	1,0420	1,0420	1,0420
21	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112
22	1,0251	1,0251	1,0251	1,0251	1,0251	1,0251	1,0251	1,0251	1,0251	1,0251
23	1,0251	1,0251	1,0251	1,0251	1,0251	1,0251	1,0251	1,0251	1,0251	1,0251
24	1,0186	1,0186	1,0186	1,0186	1,0186	1,0186	1,0186	1,0186	1,0186	1,0186
25	1,0186	1,0186	1,0186	1,0186	1,0186	1,0186	1,0186	1,0186	1,0186	1,0186

Tabla 22. Relación entre modos propios de vibración de modelos escalados de acero y hierro colado
(Modelo biempotrado).

Relación entre modos propios de modelos escalados de acero y hierro colado (Modelo biempotrado)										
ESCALA	1:1	1:2	1:3	1:4	1:5	1:6	1:7	1:8	1:9	1:10
Modo propio de vibración	1,0000	0,5000	0,3333	0,2500	0,2000	0,1667	0,1429	0,1250	0,1111	0,1000
1	1,0586	1,0586	1,0586	1,0586	1,0586	1,0586	1,0586	1,0586	1,0586	1,0586
2	1,0586	1,0586	1,0586	1,0586	1,0586	1,0586	1,0586	1,0586	1,0586	1,0586
3	1,0111	1,0111	1,0111	1,0111	1,0111	1,0111	1,0111	1,0111	1,0111	1,0111
4	1,0480	1,0480	1,0480	1,0480	1,0480	1,0480	1,0480	1,0480	1,0480	1,0480
5	1,0480	1,0480	1,0480	1,0480	1,0480	1,0480	1,0480	1,0480	1,0480	1,0480
6	1,0638	1,0638	1,0638	1,0638	1,0638	1,0638	1,0638	1,0638	1,0638	1,0638
7	1,0111	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0111
8	1,0409	1,0409	1,0409	1,0409	1,0409	1,0409	1,0409	1,0409	1,0409	1,0409
9	1,0409	1,0409	1,0409	1,0409	1,0409	1,0409	1,0409	1,0409	1,0409	1,0409
10	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112
11	1,0368	1,0368	1,0368	1,0368	1,0368	1,0368	1,0368	1,0368	1,0368	1,0368
12	1,0368	1,0368	1,0368	1,0368	1,0368	1,0368	1,0368	1,0368	1,0368	1,0368
13	1,0613	1,0613	1,0613	1,0613	1,0613	1,0613	1,0613	1,0613	1,0613	1,0613
14	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112
15	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350
16	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350	1,0350
17	1,0563	1,0563	1,0563	1,0563	1,0563	1,0563	1,0563	1,0563	1,0563	1,0563
18	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112	1,0112
19	1,0337	1,0337	1,0337	1,0337	1,0337	1,0337	1,0337	1,0337	1,0337	1,0337
20	1,0337	1,0337	1,0337	1,0337	1,0337	1,0337	1,0337	1,0337	1,0337	1,0337
21	1,0136	1,0136	1,0136	1,0136	1,0136	1,0136	1,0136	1,0136	1,0136	1,0136
22	1,0136	1,0136	1,0136	1,0136	1,0136	1,0136	1,0136	1,0136	1,0136	1,0136
23	1,0399	1,0399	1,0399	1,0399	1,0399	1,0399	1,0399	1,0399	1,0399	1,0399
24	1,0188	1,0188	1,0188	1,0188	1,0188	1,0188	1,0188	1,0188	1,0188	1,0188
25	1,0201	1,0201	1,0201	1,0201	1,0201	1,0201	1,0201	1,0201	1,0201	1,0201

Cuando se utiliza hierro colado, respecto de los modelos de acero, no sólo varían el módulo de elasticidad y la densidad, sino que también cambia el coeficiente de Poisson (algo que no ocurría entre el acero y el aluminio, ya que los coeficientes de Poisson de dichos materiales son prácticamente idénticos). Así, se deduce que la modificación de este último parámetro hace que la evolución de los modos propios de vibración esté también influenciada por la forma y las condiciones de contorno del modelo (implícitamente, el coeficiente de Poisson), lo que es mucho más complicado de cuantificar en forma de expresión matemática.

No obstante, si se dividen los valores obtenidos en la tabla 21 por la relación (11.3) que se tendría entre el módulo de elasticidad y la densidad del hierro colado y el acero (relación equivalente a la (11.2) obtenida en el apartado 11.2.6 y que supondremos que se mantiene), se puede cuantificar, para cada modo propio de vibración, la influencia del coeficiente de Poisson (ver tabla 23).

$$p = \sqrt{\frac{E_{\text{acero}} \cdot \rho_{\text{hierro colado}}}{E_{\text{hierro colado}} \cdot \rho_{\text{acero}}}} = \sqrt{\frac{210 \cdot 7250}{175 \cdot 7850}} = 1,05274890 \quad (11.3)$$

Tabla 23. Influencia del coeficiente de Poisson en la relación entre los modos propios de vibración del modelo libre de acero y hierro colado.

Modo propio de vibración	Relación entre diferentes modos propios de vibración considerando únicamente el coeficiente de Poisson. (Modelo libre, para todas las escalas).
1	1,33344973
2	0,680960939
3	1,005190122
4	0,998774697
5	0,998774697
6	0,960484024
7	0,996302379
8	0,996302379
9	0,999064553
10	0,960499533
11	0,993795765
12	0,993795765
13	0,960497607
14	0,995860365
15	0,990739647
16	0,990739647
17	0,960519044
18	0,986206705
19	0,986206705
20	0,989774304
21	0,960545189
22	0,973703479
23	0,973703479
24	0,967520647
25	0,967520647
MEDIA	0,975630208

De esta forma, resulta que el error medio consecuencia de despreciar el coeficiente de Poisson sería:

$$Error(\%) = \frac{1 - 0,97563}{1} \cdot 100 = 2,437\%$$

Podría considerarse que este error influye de manera significativa en la relación entre los modos propios de vibración ya que, el parámetro p estimado tiene un valor de 1,05275. Sin embargo hay que considerar que la influencia del coeficiente de Poisson (2,437%) se ha obtenido para una variación del mismo del 30%, mientras que para una variación de la densidad y del módulo de elasticidad del 7,65% y del 16%, respectivamente, la influencia es del 5,27% (prácticamente el doble que la de Poisson). Datos similares se obtendrían si se llevara a cabo este análisis con los modelos empotrado en un lado y biempotrado.

Todo ello pone de manifiesto la importancia del módulo de elasticidad y de la densidad frente al coeficiente de Poisson.

Así, en el análisis de modos propios de vibración y, desde este momento, se considerará despreciable la influencia del coeficiente de Poisson, aunque sería de interés un futuro estudio en profundidad de la misma.

11.2.8 Conclusiones del análisis.

Tras el análisis modal adimensional llevado a cabo se ha podido comprobar que la frecuencia propia de vibración de cada modo propio aumenta proporcionalmente al factor de reducción de escala aplicado. Es decir, si un modelo a escala 1:1 tiene una frecuencia natural de 1000Hz, dicho modelo, a escala 1:5, tendría una frecuencia propia de vibración de 5000Hz.

Por otro lado, se ha obtenido la relación existente entre los modos propios de vibración de un mismo modelo constituido de materiales diferentes, siempre que estos tengan un coeficiente de Poisson que no varíe de manera sustancial de un material a otro. Esta relación se indica en (11.4).

$$p = \sqrt{\frac{E_{material\ 1} \cdot \rho_{material\ 2}}{E_{material\ 2} \cdot \rho_{material\ 1}}} \quad (11.4)$$

En el caso de que los materiales tengan coeficientes de Poisson muy diferentes podría aplicarse dicha expresión pero sabiendo que se estaría introduciendo cierto error, cuya cuantificación debería estudiarse en profundidad, algo que no es objeto de este trabajo.

11.3 Análisis adimensional de fuerzas y tensiones sobre cilindros.

11.3.1 Introducción.

En los siguientes apartados se buscará la relación adimensional existente, en base al modelo del cilindro 1:1 sin escalar indicado en el apartado 11.1, de las cargas y tensiones que se obtienen, deseando que el desplazamiento mantenga la misma relación de escala que la geometría del modelo.

Para ello, el cilindro se considerará, en dos situaciones:

- a) Con un lado empotrado, como ménsula.
- b) Con los dos lados empotrados, como cilindro biempotrado.

11.3.2 Cilindro empotrado como ménsula.

11.3.2.1 Análisis adimensional de fuerzas.

En la figura 248 puede observarse una ménsula sometida a una carga puntual en su extremo.

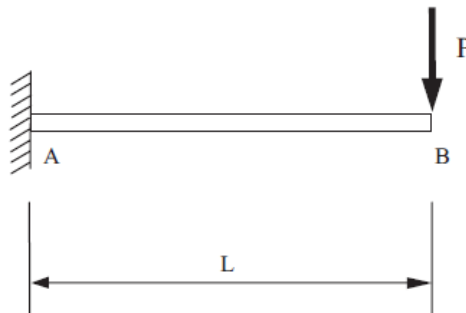


Figura 248. Ménsula sometida a una carga puntual en su extremo.

En esta situación, el desplazamiento vertical hacia abajo en el punto de aplicación de la carga vendría dado por (11.5).

$$f_B = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} \quad (11.5)$$

Considerándose que se está analizando un cilindro, el momento de inercia (I) se indica en (11.6).

$$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \quad (11.6)$$

Introduciendo (11.6) en (11.5) se obtiene (11.7).

$$f_B = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{64}} = \frac{64 \cdot P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot \pi \cdot d^4} \quad (11.7)$$

Conociendo la relación entre la fuerza aplicada, la geometría del cilindro como ménsula y el desplazamiento en el punto de aplicación de la carga, es fácil obtener el parámetro adimensional por el que se debería multiplicar la carga para mantener, en el desplazamiento, el mismo factor de escala que el aplicado a la geometría del modelo. Para ello se sigue el siguiente desarrollo indicado en (11.8).

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{B,1} = \frac{64 \cdot P_1 \cdot L_1^3}{3 \cdot E \cdot \pi \cdot d_1^4} \Rightarrow \frac{3 \cdot E}{64} = \frac{P_1 \cdot L_1^3}{f_{B,1} \cdot d_1^4} \\ f_{B,2} = \frac{64 \cdot P_2 \cdot L_2^3}{3 \cdot E \cdot \pi \cdot d_2^4} \Rightarrow \frac{3 \cdot E}{64} = \frac{P_2 \cdot L_2^3}{f_{B,2} \cdot d_2^4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{P_1 \cdot L_1^3}{f_{B,1} \cdot d_1^4} = \frac{P_2 \cdot L_2^3}{f_{B,2} \cdot d_2^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{f_{B,2} \cdot L_1^3 \cdot d_2^4}{f_{B,1} \cdot L_2^3 \cdot d_1^4} \cdot P_1 = n \cdot n^{-3} \cdot n^4 \cdot P_1 = n^2 \cdot P_1 \quad (11.8)$$

donde el subíndice 1 hace referencia al modelo inicial (escala 1:1) y el subíndice 2 al modelo escalado, siendo n el factor de escala. De esta forma, se obtienen las relaciones indicadas en (11.9).

$$\left\{ \begin{array}{l} L_2 = n \cdot L_1 \\ d_2 = n \cdot d_1 \\ f_{B,2} = n \cdot f_{B,1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = \frac{L_2}{L_1} \\ n = \frac{d_2}{d_1} \\ n = \frac{f_{B,2}}{f_{B,1}} \end{array} \right\} \quad (11.9)$$

Así, considerando que al modelo inicial se le aplicará una carga de 1000N, las fuerzas teóricas a aplicar a los modelos escalados, según las hipótesis planteadas, se muestran en la tabla 24.

Tabla 24. Fuerzas a aplicar al cilindro considerado como ménsula en función de la escala.

Escala	Factor de escala	Fuerza a aplicar (N)
1:1	1	1000
1:2	0,5	250
1:3	0,3333	111,111
1:4	0,25	62,5
1:5	0,2	40
1:6	0,1667	27,778
1:7	0,1429	20,408
1:8	0,125	15,625
1:9	0,1111	12,346
1:10	0,1	10

11.3.2.2 Análisis adimensional de tensiones.

A partir del momento flector generado sobre el cilindro como ménsula por la aplicación de la carga puntual (ver figura 249), pueden obtenerse las tensiones normales.

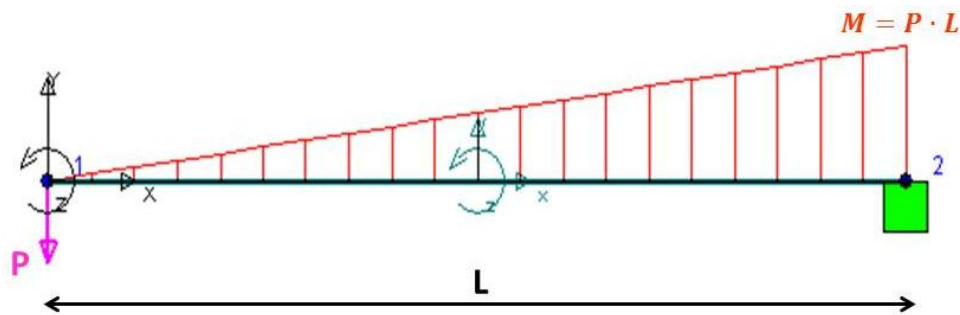


Figura 249. Diagrama de momentos flectores del cilindro como ménsula.

De esta forma, se obtiene que las tensiones normales sobre la sección más solicitada (el empotramiento) serán las indicadas en (11.10).

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{P \cdot L \cdot \frac{d}{2}}{\frac{\pi \cdot d^4}{64}} = \frac{32 \cdot P \cdot L}{\pi \cdot d^3} \quad (11.10)$$

siendo y la distancia desde el centro de gravedad de la sección a la superficie del cilindro, es decir, el radio del cilindro.

Conociendo la relación entre la fuerza aplicada, la geometría del cilindro como ménsula y la tensión en el empotramiento, se puede obtener el valor del parámetro adimensional que relaciona las tensiones para que el desplazamiento mantenga el mismo factor de escala que el aplicado a la geometría del modelo, ya que se aplicarán las mismas cargas que las obtenidas en el análisis adimensional de las fuerzas. Para ello se procede de acuerdo con el siguiente desarrollo indicado en (11.11).

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{32 \cdot P_1 \cdot L_1}{\pi \cdot d_1^3} \Rightarrow \frac{\pi}{32} = \frac{P_1 \cdot L_1}{\sigma_1 \cdot d_1^3} \\ \sigma_2 = \frac{32 \cdot P_2 \cdot L_2}{\pi \cdot d_2^3} \Rightarrow \frac{\pi}{32} = \frac{P_2 \cdot L_2}{\sigma_2 \cdot d_2^3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{P_1 \cdot L_1}{\sigma_1 \cdot d_1^3} = \frac{P_2 \cdot L_2}{\sigma_2 \cdot d_2^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = \frac{P_2 \cdot L_2 \cdot d_1^3}{P_1 \cdot L_1 \cdot d_2^3} \cdot P_1 = n^2 \cdot n \cdot n^{-3} \cdot P_1 = \sigma_1 \quad (11.11)$$

donde el subíndice 1 hace referencia al modelo inicial (escala 1:1) y el subíndice 2 al modelo escalado, siendo n el factor de escala, de manera que se obtienen las relaciones indicadas en (11.12).

$$\left\{ \begin{array}{l} L_2 = n \cdot L_1 \\ d_2 = n \cdot d_1 \\ P_2 = n^2 \cdot P_1 \text{ (según lo calculado en apartado 11.3.2.1)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = \frac{L_2}{L_1} \\ n = \frac{d_2}{d_1} \\ n^2 = \frac{P_2}{P_1} \end{array} \right\} \quad (11.12)$$

De esta forma, según las hipótesis planteadas a lo largo del desarrollo, las tensiones se mantendrán invariables de un modelo escalado a otro.

11.3.2.3 Análisis adimensional de fuerzas y tensiones variando el material.

En este apartado se buscará el valor del parámetro adimensional por el que deberían ser multiplicadas tensiones y fuerzas al cambiar el material de acero ($E = 210 \text{ GPa}$) a aluminio ($E = 70 \text{ GPa}$) para que, como se ha venido considerando hasta ahora, el desplazamiento en el extremo libre del cilindro mantenga el factor de escala aplicado a éste en cada caso.

Usando la misma nomenclatura que en los apartados anteriores, en el análisis adimensional de fuerzas se tendrían las relaciones indicadas en (11.13).

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{B,1} = \frac{64 \cdot P_1 \cdot L_1^3}{3 \cdot E_1 \cdot \pi \cdot d_1^4} \Rightarrow \frac{3}{64} = \frac{P_1 \cdot L_1^3}{f_{B,1} \cdot d_1^4 \cdot E_1} \\ f_{B,2} = \frac{64 \cdot P_2 \cdot L_2^3}{3 \cdot E_2 \cdot \pi \cdot d_2^4} \Rightarrow \frac{3}{64} = \frac{P_2 \cdot L_2^3}{f_{B,2} \cdot d_2^4 \cdot E_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{P_1 \cdot L_1^3}{f_{B,1} \cdot d_1^4 \cdot E_1} = \frac{P_2 \cdot L_2^3}{f_{B,2} \cdot d_2^4 \cdot E_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{f_{B,2} \cdot L_1^3 \cdot d_2^4 \cdot E_2}{f_{B,1} \cdot L_2^3 \cdot d_1^4 \cdot E_1} \cdot P_1 = n \cdot n^{-3} \cdot n^4 \cdot m \cdot P_1 = n^2 \cdot m \cdot P_1 \quad (11.13)$$

donde m es el parámetro adimensional que relaciona el módulo de elasticidad del acero (E_1) con el del aluminio (E_2), tal y como se indica en (11.14).

$$m = \frac{E_2}{E_1} = \frac{70}{210} = 0.333 \quad (11.14)$$

De esta forma, considerando que al modelo inicial, escala 1:1 y construido en acero, se le aplicará una carga de 1000N, las fuerzas teóricas a aplicar a los modelos escalados, según las hipótesis planteadas, se muestran en la tabla 25.

Tabla 25. Fuerzas a aplicar al cilindro construido con aluminio considerado como ménsula en función de la escala.

Escala	Factor de escala	Fuerza a aplicar (N)
1:1	1	333,333
1:2	0,5	83,333
1:3	0,3333	37,037
1:4	0,25	20,833
1:5	0,2	13,333
1:6	0,1667	9,259
1:7	0,1429	6,803
1:8	0,125	5,208
1:9	0,1111	4,115
1:10	0,1	3,333

Las tensiones, puesto que no dependen del material, no sufrirán variaciones respecto de los cálculos anteriormente realizados, es decir, se mantendrán invariables de un modelo escalado a otro sea de acero o de aluminio. Sin embargo, puesto que la fuerza que se aplica sí que depende del material, las tensiones en los modelos de aluminio respecto de las que se obtengan en el modelo de acero variarán en la proporción en que cambia el módulo de la elasticidad, es decir, en 1/3.

11.3.2.4 Comprobación del análisis adimensional mediante la aplicación del MEF.

En la tabla 26 se muestran los desplazamientos en el extremo libre del cilindro considerado como ménsula y las tensiones en el empotramiento para los modelos escalados, habiéndose aplicado sobre él las cargas especificadas en las tablas 24 y 25 en función de si el material es acero o aluminio, respectivamente. Asimismo, se ha calculado el factor de escala del desplazamiento en el extremo libre en relación al que se obtiene con el cilindro de escala 1:1. Se puede comprobar, observando la figura 250, que se confirman las hipótesis realizadas a lo largo del presente desarrollo, existiendo un error prácticamente nulo entre los cálculos teóricos y los simulados llevados a cabo.

También, en el intento de comprobar todos los cálculos realizados de los análisis adimensionales, se corrobora que las tensiones se mantienen constantes de una escala a otra si la geometría y las cargas aplicadas cambian de acuerdo a los parámetros obtenidos.

En caso de variar, adicionalmente, el material, las consideraciones llevadas a cabo tienen la consecuencia de que los desplazamientos cambien de acuerdo al factor de escala aplicado, manteniéndose las tensiones constantes de una escala a otra pero modificándose de manera directamente proporcional a la variación del módulo de elasticidad del nuevo material respecto al del modelo original, teniéndose en cuenta que el coeficiente de Poisson se mantiene constante de un material a otro.

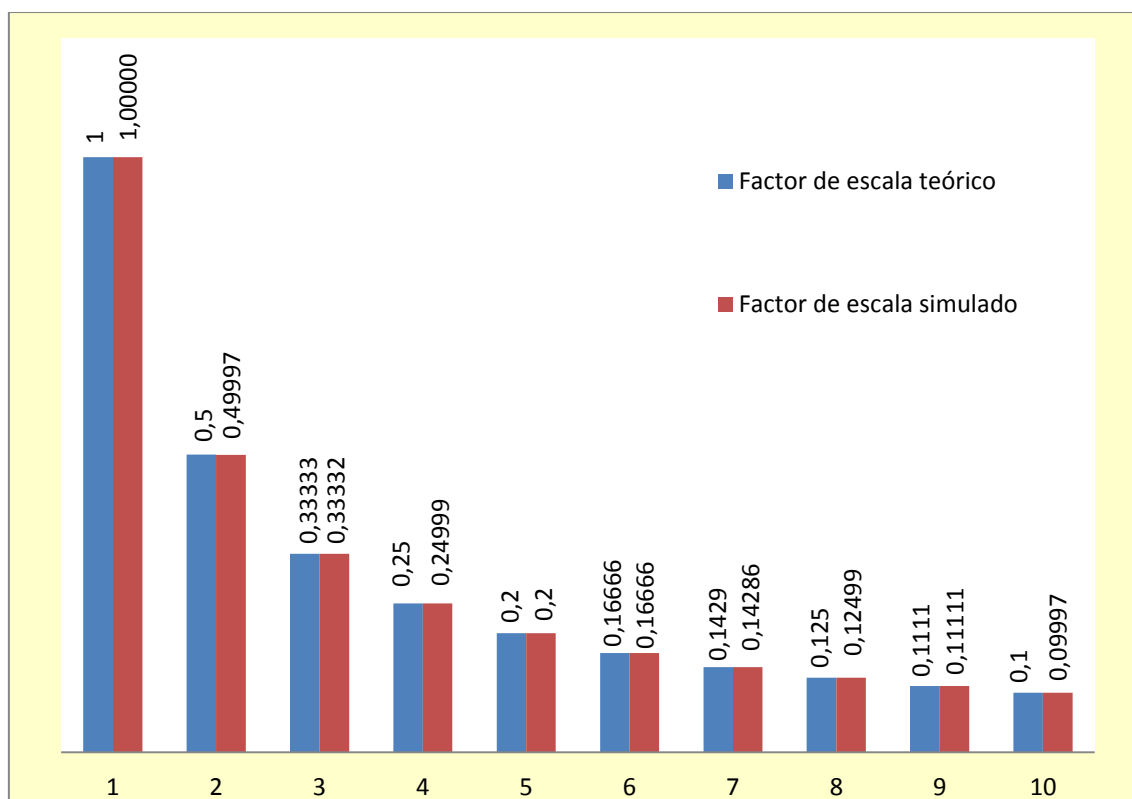


Figura 250. Factor de escala teórico vs. simulado (Cilindro en ménsula).

Tabla 26. Resultados simulados utilizando el MEF para la comprobación del análisis adimensional
(Cilindro en ménsula).

Resultados simulados aplicando el MEF								
		Fuerza a aplicar (N)		Desplazamiento vertical en el extremo libre (mm)		Tensiones en el empotramiento (MPa)		Factor de escala simulado de desplazamiento
Escala	Factor de escala teórico	Acero	Aluminio	Acero	Aluminio	Acero	Aluminio	Acero y aluminio
1:1	1	1000	333,333	0,019585	0,019584	1,252	0,417	1,00000
1:2	0,5	250	83,333	0,009792	0,009792	1,252	0,417	0,49997
1:3	0,3333	111,111	37,037	0,006528	0,006528	1,252	0,417	0,33332
1:4	0,25	62,5	20,833	0,004896	0,004896	1,252	0,417	0,24999
1:5	0,2	40	13,333	0,003917	0,003917	1,252	0,417	0,20000
1:6	0,1667	27,778	9,259	0,003264	0,003264	1,252	0,417	0,16666
1:7	0,1429	20,408	6,803	0,002798	0,002798	1,252	0,417	0,14286
1:8	0,125	15,625	5,208	0,002448	0,002446	1,252	0,417	0,12499
1:9	0,1111	12,346	4,115	0,002176	0,002176	1,252	0,417	0,11111
1:10	0,1	10	3,333	0,001958	0,001958	1,252	0,417	0,09997

11.3.3 Cilindro biempotrado.

11.3.3.1 Análisis adimensional de fuerzas.

En la figura 251 se observa una viga biempotrada con una carga puntual en una de sus secciones.

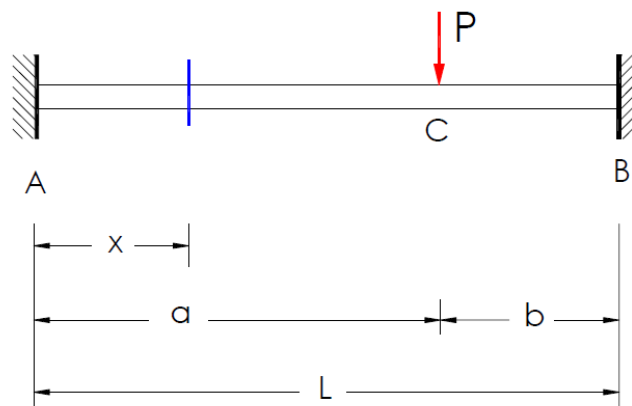


Figura 251. Viga biempotrada con una carga puntual en una de sus secciones.

El desplazamiento vertical hacia abajo en el punto de aplicación de la carga vendría dado por la ecuación (11.15)

$$f_c = \frac{P \cdot a^3 \cdot b^3}{3 \cdot E \cdot I \cdot L^3} \quad (11.15)$$

Con objeto de simplificar los cálculos, se considerará que la carga está aplicada en la sección media de la viga, de manera que se obtiene la expresión (11.16).

$$f_c = \frac{P \cdot a^3 \cdot b^3}{3 \cdot E \cdot I \cdot L^3} = \frac{P \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3}{3 \cdot E \cdot I \cdot L^3} = \frac{P \cdot L^3}{192 \cdot E \cdot I} \quad (11.16)$$

Puesto que se está analizando un cilindro, donde $I = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$, el valor final genérico de la flecha en el punto de aplicación de la carga quedará según la expresión (11.17)

$$f_c = \frac{P \cdot L^3}{192 \cdot E \cdot I} = \frac{P \cdot L^3}{192 \cdot E \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{64}} = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot \pi \cdot d^4} \quad (11.17)$$

Análogamente a como se procedió con la viga en ménsula analizada en el apartado 11.3.2, se calcula el parámetro adimensional por el que se debería multiplicar la carga para mantener, en el desplazamiento, el mismo factor de escala que el aplicado a la geometría del modelo. El proceso se muestra en (11.18).

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{c,1} = \frac{P_1 \cdot L_1^3}{3 \cdot E \cdot \pi \cdot d_1^4} \Rightarrow 3 \cdot E = \frac{P_1 \cdot L_1^3}{f_{c,1} \cdot d_1^4} \\ f_{c,2} = \frac{64 \cdot P_2 \cdot L_2^3}{3 \cdot E \cdot \pi \cdot d_2^4} \Rightarrow 3 \cdot E = \frac{P_2 \cdot L_2^3}{f_{c,2} \cdot d_2^4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{P_1 \cdot L_1^3}{f_{c,1} \cdot d_1^4} = \frac{P_2 \cdot L_2^3}{f_{c,2} \cdot d_2^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{f_{c,2} \cdot L_1^3 \cdot d_2^4}{f_{c,1} \cdot L_2^3 \cdot d_1^4} \cdot P_1 = n \cdot n^{-3} \cdot n^4 \cdot P_1 = n^2 \cdot P_1 \quad (11.18)$$

donde el subíndice 1 hace referencia al modelo inicial (escala 1:1) y el subíndice 2 al modelo escalado, siendo n el factor de escala, de manera que se tienen las relaciones indicadas en (11.19).

$$\left\{ \begin{array}{l} L_2 = n \cdot L_1 \\ d_2 = n \cdot d_1 \\ f_{c,2} = n \cdot f_{c,1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = \frac{L_2}{L_1} \\ n = \frac{d_2}{d_1} \\ n = \frac{f_{c,2}}{f_{c,1}} \end{array} \right\} \quad (11.19)$$

De esta forma, se obtienen los mismos resultados que en el análisis adimensional de la viga en ménsula, por lo que considerando que al modelo inicial se le aplicará una carga de $1000N$, las fuerzas teóricas a aplicar a los modelos escalados, según las hipótesis planteadas, son las que se mostraron en la tabla 24.

11.3.3.2 Análisis adimensional de tensiones.

A partir del momento flector generado sobre el cilindro biempotrado por la aplicación de la carga puntual (ver figura 252), pueden obtenerse las tensiones normales sobre las secciones más solicitadas del cilindro (los empotramientos o la sección media), tal y como se hizo precedentemente y se indica en (11.20).

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{\frac{P \cdot L}{8} \cdot \frac{d}{2}}{\frac{\pi \cdot d^4}{64}} = \frac{4 \cdot P \cdot L}{\pi \cdot d^3} \quad (11.20)$$

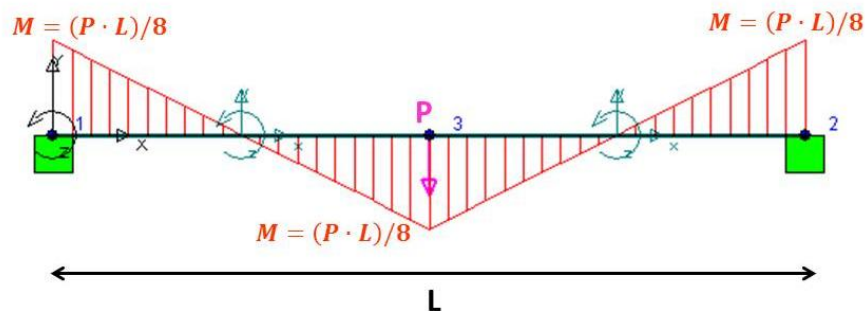


Figura 252. Diagrama de momentos flectores del cilindro biempotrado.

Llevando a cabo el análisis adimensional se sigue el desarrollo indicado en (11.21).

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{4 \cdot P_1 \cdot L_1}{\pi \cdot d_1^3} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{P_1 \cdot L_1}{\sigma_1 \cdot d_1^3} \\ \sigma_2 = \frac{4 \cdot P_2 \cdot L_2}{\pi \cdot d_2^3} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{P_2 \cdot L_2}{\sigma_2 \cdot d_2^3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{P_1 \cdot L_1}{\sigma_1 \cdot d_1^3} = \frac{P_2 \cdot L_2}{\sigma_2 \cdot d_2^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = \frac{P_2 \cdot L_2 \cdot d_1^3}{P_1 \cdot L_1 \cdot d_2^3} \cdot P_1 = n^2 \cdot n \cdot n^{-3} \cdot P_1 = \sigma_1 \quad (11.21)$$

donde el subíndice 1 hace referencia al modelo inicial (escala 1:1) y el subíndice 2 al modelo escalado, siendo n el factor de escala, de manera que se tienen las relaciones indicadas en (11.22).

$$\left\{ \begin{array}{l} L_2 = n \cdot L_1 \\ d_2 = n \cdot d_1 \\ P_2 = n^2 \cdot P_1 \text{ (según lo calculado en apartado 11.3.3.1)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = \frac{L_2}{L_1} \\ n = \frac{d_2}{d_1} \\ n^2 = \frac{P_2}{P_1} \end{array} \right\} \quad (11.22)$$

De esta forma, siguiendo las hipótesis planteadas a lo largo del desarrollo, las tensiones se mantendrán invariables de un modelo escalado a otro, tal y como sucedía con el cilindro considerado como ménsula.

11.3.3.3 Análisis adimensional de fuerzas y tensiones variando el material.

En este apartado se buscará el valor del parámetro adimensional por el que deberían ser multiplicadas tensiones y fuerzas al cambiar el material de acero ($E = 210 \text{ GPa}$) a aluminio ($E = 70 \text{ GPa}$) para que, como se ha venido considerando hasta ahora, el desplazamiento en el extremo libre del cilindro mantenga el factor de escala aplicado a éste en cada caso.

Los resultados obtenidos hasta el momento del análisis adimensional del cilindro biempotrado han sido idénticos a los del cilindro en ménsula. Por ello, en caso de que se varíe el material y considerando que al modelo inicial, escala 1:1 y construido en acero, se le aplicará una carga de 1000N, las fuerzas teóricas a aplicar a los modelos escalados, según las hipótesis planteadas, serán las mismas que se obtuvieron en la tabla 26 del apartado 11.3.2.3, aplicándose todas las conclusiones e hipótesis referentes al mismo.

11.3.3.4 Comprobación del análisis adimensional mediante la aplicación del MEF.

En la tabla 27 se muestran los desplazamientos de la sección media del cilindro biempotrado y las tensiones en el empotramiento para los modelos escalados, habiéndose aplicado sobre él las cargas especificadas en las tablas 24 y 25 en función de si el material es acero o aluminio (con lo que el coeficiente de Poisson se mantiene constante), respectivamente. Se trata de una tabla análoga a la del apartado 11.3.2.4, de la misma manera que la figura 253 lo es a la 250.

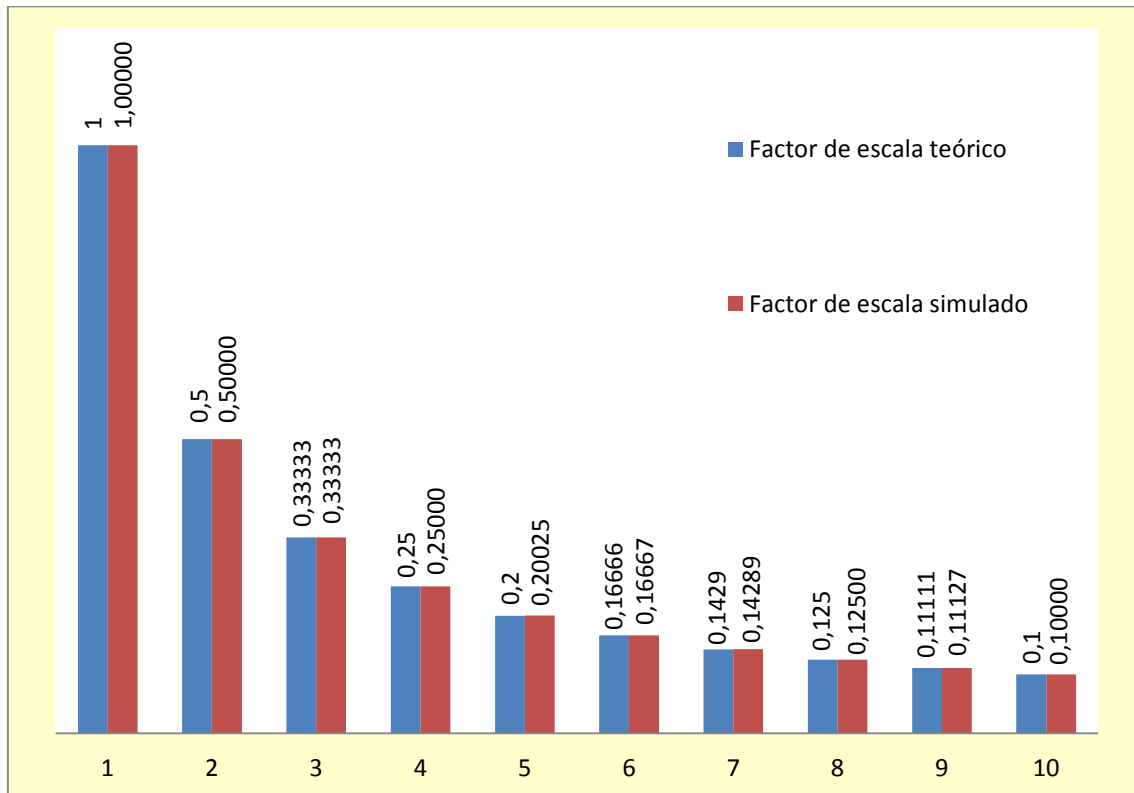


Figura 253. Factor de escala teórico vs. simulado (Cilindro biempotrado).

Tabla 27. Resultados simulados utilizando el MEF para la comprobación del análisis adimensional (Cilindro biempotrado).

Resultados simulados aplicando el MEF								
Escala	Factor de escala teórico	Fuerza a aplicar (N)		Desplazamiento vertical en el extremo libre (mm)		Tensiones en el empotramiento (MPa)		Factor de escala simulado de desplazamiento
		Acero	Aluminio	Acero	Aluminio	Acero	Aluminio	Acero y aluminio
1:1	1	1000	333,333	0,000408	0,000408	0,129	0,043	1,00000
1:2	0,5	250	83,333	0,000204	0,000204	0,129	0,043	0,50000
1:3	0,33333	111,111	37,037	0,000136	0,000136	0,129	0,043	0,33333
1:4	0,25	62,5	20,833	0,000102	0,000102	0,129	0,043	0,25000
1:5	0,2	40	13,333	0,0000817	0,0000816	0,129	0,043	0,20025
1:6	0,16667	27,778	9,259	0,000068	0,000068	0,129	0,043	0,16667
1:7	0,1429	20,408	6,803	0,0000583	0,0000583	0,129	0,043	0,14289
1:8	0,125	15,625	5,208	0,000051	0,000051	0,129	0,043	0,12500
1:9	0,11111	12,346	4,115	0,0000454	0,0000454	0,129	0,043	0,11127
1:10	0,1	10	3,333	0,0000408	0,0000408	0,129	0,043	0,10000

11.3.4 Influencia del coeficiente de Poisson sobre el análisis adimensional.

En el presente apartado se llevarán a cabo los mismos análisis que en los anteriores, sin embargo, en este caso se compararán modelos construidos en acero con modelos construidos con hierro colado en vez de aluminio (ver tablas 28 y 29). Se supondrán idénticas hipótesis que en los procesos precedentes.

El hierro colado posee un coeficiente de Poisson de 0,23. Es decir, que éste varía un 30% respecto de los del aluminio y el acero (0,33). De esta forma, se considerará cuál es la influencia del coeficiente de Poisson sobre los parámetros adimensionales estimados anteriormente, lo que no se había tenido en cuenta en los apartados preliminares.

Las tensiones dependen de la geometría del modelo y de las cargas aplicadas sobre el mismo, por lo que es de suponer que la influencia del coeficiente de Poisson sobre las mismas, con hierro colado como material (y debido a la sencillez de la geometría), será nula, debiéndose obtener el valor (que se confirma en las tablas 28 y 29) dado por:

$$\sigma_{\text{hierro colado}} = m \cdot \sigma_{\text{acero}} = (175/210) \cdot \sigma_{\text{acero}}$$

En cuanto a los desplazamientos, éstos sí que se verían afectados por el coeficiente de Poisson. No obstante, la variación que se produce, en los casos analizados, respecto del cálculo sin su consideración no supera el 2% (frente al 30% de variación de dicho coeficiente), por lo que la influencia del mismo se tomará como despreciable.

Tabla 28. Resultados simulados utilizando el MEF para la comprobación del análisis adimensional considerando la influencia del coeficiente de Poisson (Cilindro en ménsula).

Resultados simulados aplicando el MEF									
Escala	Factor de escala teórico	Fuerza a aplicar (N)		Desplazamiento vertical en el extremo libre (mm)		Tensiones en el empotramiento (MPa)		Factor de escala simulado de desplazamiento	Error (%)
		Acero	Hierro colado	Acero	Hierro colado	Acero	Hierro colado		
1:1	1	1000	833,333	0,019585	0,019972	1,252	1,04	1,01976002	1,976
1:2	0,5	250	208,333	0,009792	0,009986	1,252	1,04	0,50988001	1,976
1:3	0,3333	111,111	92,593	0,006528	0,006657	1,252	1,04	0,339902987	1,971
1:4	0,25	62,5	52,083	0,004896	0,004993	1,252	1,04	0,254940005	1,976
1:5	0,2	40	33,333	0,003917	0,003994	1,252	1,04	0,20393158	1,966
1:6	0,1667	27,778	23,148	0,003264	0,003329	1,252	1,04	0,169977023	1,986
1:7	0,1429	20,408	17,007	0,002798	0,002853	1,252	1,04	0,145672709	1,971
1:8	0,125	15,625	13,021	0,002448	0,002497	1,252	1,04	0,127495532	1,996
1:9	0,1111	12,346	10,288	0,002176	0,002219	1,252	1,04	0,113300996	1,971
1:10	0,1	10	8,333	0,001958	0,001997	1,252	1,04	0,10196579	1,966

Tabla 29. Resultados simulados utilizando el MEF para la comprobación del análisis adimensional considerando la influencia del coeficiente de Poisson (Cilindro biempotrado).

Resultados simulados aplicando el MEF									
Escala	Factor de escala teórico	Fuerza a aplicar (N)		Desplazamiento vertical en el extremo libre (mm)		Tensiones en el empotramiento (MPa)		Factor de escala simulado de desplazamiento	Error (%)
		Acero	Hierro colado	Acero	Hierro colado	Acero	Hierro colado		
1:1	1	1000	833,333	0,000408	0,000415	1,252	0,107	1,01716	1,72
1:2	0,5	250	208,333	0,000204	0,000207	1,252	0,107	0,50735	1,47
1:3	0,3333	111,111	92,593	0,000136	0,000138	1,252	0,107	0,33824	1,47
1:4	0,25	62,5	52,083	0,000102	0,000104	1,252	0,107	0,25490	1,96
1:5	0,2	40	33,333	0,0000817	0,000083	1,252	0,107	0,20343	1,72
1:6	0,1667	27,778	23,148	0,000068	0,0000691	1,252	0,107	0,16936	1,62
1:7	0,1429	20,408	17,007	0,0000583	0,0000593	1,252	0,107	0,14534	1,74
1:8	0,125	15,625	13,021	0,000051	0,0000519	1,252	0,107	0,12721	1,76
1:9	0,1111	12,346	10,288	0,0000454	0,0000461	1,252	0,107	0,11299	1,69
1:10	0,1	10	8,333	0,0000408	0,0000415	1,252	0,107	0,10172	1,72

A pesar de todo lo indicado, sería de interés llevar a cabo, en futuros trabajos, tal y como ocurría con los modos propios de vibración, un estudio más profundo de estos aspectos.

11.3.5 Conclusiones del análisis adimensional de tensiones y desplazamientos en cilindros.

Como se ha podido observar, los resultados del análisis dimensional, en cuanto a relaciones entre las diferentes variables se refiere, han sido idénticos para los dos modelos de cilindro (en ménsula y biempotrado) que se han analizado con modelos constituidos en acero y aluminio. Esta es, precisamente, la ventaja del análisis adimensional: a partir de relaciones entre las cargas, las tensiones y la geometría se puede conocer como varían cada una de ellas al cambiar, multiplicando por un factor de escala, alguna de las otras, siempre que se esté en régimen elástico – lineal y se considere el coeficiente de Poisson constante.

11.4 Análisis adimensional de eje ferroviario.

11.4.1 Introducción.

Hasta ahora se ha visto que, tanto en el cilindro con un lado empotrado como en el cilindro biempotrado, los análisis adimensionales anteriores han dado los mismos resultados en cuanto a relaciones escalares y de material se refiere.

A continuación se comprobará si dichos resultados son extrapolables al eje ferroviario de interés, con geometría más compleja y donde el análisis dimensional es difícil de llevar a cabo de manera analítica, con el objetivo de diseñar un banco de ensayo a escala.

11.4.2 Planteamiento del problema.

Anteriormente se analizó el sistema que se muestra en la figura 254 (que se encuentra reducido a la mitad por la aplicación de condiciones de simetría) aplicándole una fuerza de 125kN (25t) en la zona donde se produciría la transferencia de carga desde la caja de grasa, obteniéndose un desplazamiento vertical hacia arriba en la zona media del eje de 0,238mm y una tensión máxima de 83,6MPa.

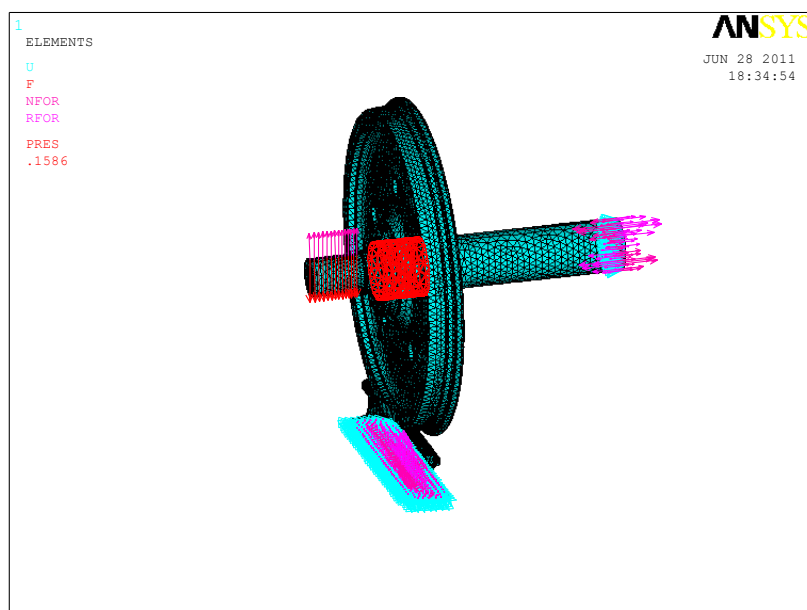


Figura 254. Sistema rail-rueda-eje analizado anteriormente.

Si se aplica a dicho modelo un factor de escala de $n = 0,2$ (1:5) y se mantiene el acero como material constitutivo, a partir del análisis adimensional llevado a cabo se tendría que:

- La carga que se debería aplicar sería:

$$F_2 = n^2 \cdot F_1 = 0,2^2 \cdot 125 = 5kN$$

- El desplazamiento resultante en la sección media del eje en esas condiciones debería ser:

$$\downarrow v_2 = n \cdot \downarrow v_1 = 0,2 \cdot 0,238 = 0,0476mm.$$

- La tensión debería mantenerse constante, siendo en el modelo escalado también de $83,6MPa$.

Por otro lado, si además de aplicar el factor de escala ($n = 0,2$, $1:5$) se varía el material constitutivo pasando de acero ($E_1 = 210 GPa$) a aluminio ($E_2 = 70 GPa$), con lo que $m_1 = E_2/E_1 = 0,333$, se deberá obtener que:

- La carga a aplicar será:

$$F_2 = n^2 \cdot m_1 \cdot F_1 = 0,2^2 \cdot 0,333 \cdot 125 = 1,667kN$$

- El desplazamiento resultante en la sección media del eje en esas condiciones se mantendría igual que en el modelo escalado sin cambiar el material, es decir:

$$\downarrow v_2 = n \cdot \downarrow v_1 = 0,2 \cdot 0,238 = 0,0476mm.$$

- La tensión cambiaría de manera directamente proporcional al módulo de elasticidad:

$$\sigma_2 = m_1 \cdot \sigma_1 = 0,333 \cdot 83,6 = 27,84MPa.$$

Además, también se considerará un material constitutivo con diferente coeficiente de Poisson, como es el hierro colado ($E_3 = 175 GPa$). Si se desprecia, tal y como se ha estimado en apartados anteriores (posteriormente se calculará el error cometido) la influencia de dicho parámetro, se tendría que:

- La carga a aplicar será:

$$F_3 = n^2 \cdot m_2 \cdot F_1 = 0,2^2 \cdot \frac{175}{210} \cdot 125 = 4,166kN$$

- El desplazamiento que se obtendría en la sección media del eje sería:

$$\downarrow v_3 = n \cdot \downarrow v_1 = 0,2 \cdot 0,238 = 0,0476mm.$$

- La tensión, tal y como ya se ha visto, resultaría:

$$\sigma_3 = m_2 \cdot \sigma_1 = \frac{175}{210} \cdot 83,6 = 69,66 MPa$$

Por otra parte, si se aplica al modelo un factor de escala de $n = 0,25$ (1:4) en vez de $n = 0,2$ (1:5), tomando el acero como material constitutivo, se dispondría que:

- La carga que se debería aplicar sería:

$$F_2 = n^2 \cdot F_1 = 0,25^2 \cdot 125 = 7.8125 kN$$

- El desplazamiento que se obtendría en la sección media del eje en esas condiciones volvería a ser:

$$\downarrow v_2 = n \cdot \downarrow v_1 = 0,25 \cdot 0,238 = 0,0595 mm.$$

- La tensión se mantendría constante, siendo de $83,6 MPa$.

Si además de aplicar el factor de escala ($n = 0,25$, 1:4) se varía el material constitutivo pasando de acero ($E_1 = 210 GPa$) a aluminio ($E_2 = 70 GPa$), tal y como se hizo con la escala $n = 0,2$ (1:5), se obtendrá que:

- La carga a aplicar será:

$$F_2 = n^2 \cdot m_1 \cdot F_1 = 0,25^2 \cdot 0,333 \cdot 125 = 2,60156 kN$$

- El desplazamiento, de nuevo, según las condiciones establecidas, es:

$$\downarrow v_2 = n \cdot \downarrow v_1 = 0,25 \cdot 0,238 = 0,0595 mm.$$

- La tensión, una vez más, cambiaría de manera directamente proporcional al módulo de elasticidad:

$$\sigma_2 = m_1 \cdot \sigma_1 = 0,333 \cdot 83,6 = 27,84 MPa.$$

Finalmente, para escala $n = 0,25$ (1:4), se considerará como material constitutivo el hierro colado ($E_3 = 175GPa$), con diferente coeficiente de Poisson. Si, de nuevo, se desprecia la influencia de dicho parámetro, resulta que:

- La carga a aplicar será:

$$F_3 = n^2 \cdot m_2 \cdot F_1 = 0,25^2 \cdot \frac{175}{210} \cdot 125 = 6,51kN$$

- El desplazamiento vendrá dado por:

$$\downarrow v_3 = n \cdot \downarrow v_1 = 0,25 \cdot 0,238 = 0,0595mm.$$

- La tensión será:

$$\sigma_3 = m_2 \cdot \sigma_1 = \frac{175}{210} \cdot 83,6 = 69,66MPa$$

A continuación, en la tabla 30, se resumen todos los cálculos previos realizados para el análisis adimensional del conjunto eje-raíl-rueda a escalas 1:4 y 1:5.

Tabla 30. Resultados obtenidos de los cálculos previos para el análisis adimensional del conjunto eje-raíl-rueda.

	Escala 1:5 (n=0,2)			Escala 1:4 (n=0,25)		
	Acero	Aluminio	Hierro colado	Acero	Aluminio	Hierro colado
Carga a aplicar (kN)	5	1,667	4,166	7,8125	2,60156	6,51
Desplazamiento en sección media (mm)	0,0476	0,0476	0,0476	0,0595	0,0595	0,0595
Tensión máxima (MPa)	83,6	27,84	69,66	83,6	27,84	69,66

11.4.3 Análisis adimensional del conjunto eje-raíl-rueda escalado 1:5 mediante la aplicación del MEF.

En la figura 255 se observan los desplazamientos verticales producidos sobre el conjunto a escala 1:5 constituido de acero. En color rojo se presentan los máximos desplazamientos verticales hacia arriba que, como se había estimado, en la sección media del eje toma un valor de 0,0476mm.

Por otra parte, en la figura 256 se muestra el eje a escala 1:5, en acero, aislado del conjunto representándose su campo de tensiones cuando interactúa con el resto del conjunto. Tal y como se había predicho en la tabla 30, la tensión máxima toma un valor de 83,599MPa,

En las figuras 257 y 258 se muestran los mismos parámetros que en las figuras 255 y 256, con la sola variación de que el sistema está constituido por aluminio. Se cumplen las predicciones llevadas a cabo y el máximo desplazamiento vertical hacia arriba y la máxima tensión del eje son, respectivamente, 0,0476mm y 27,87MPa.

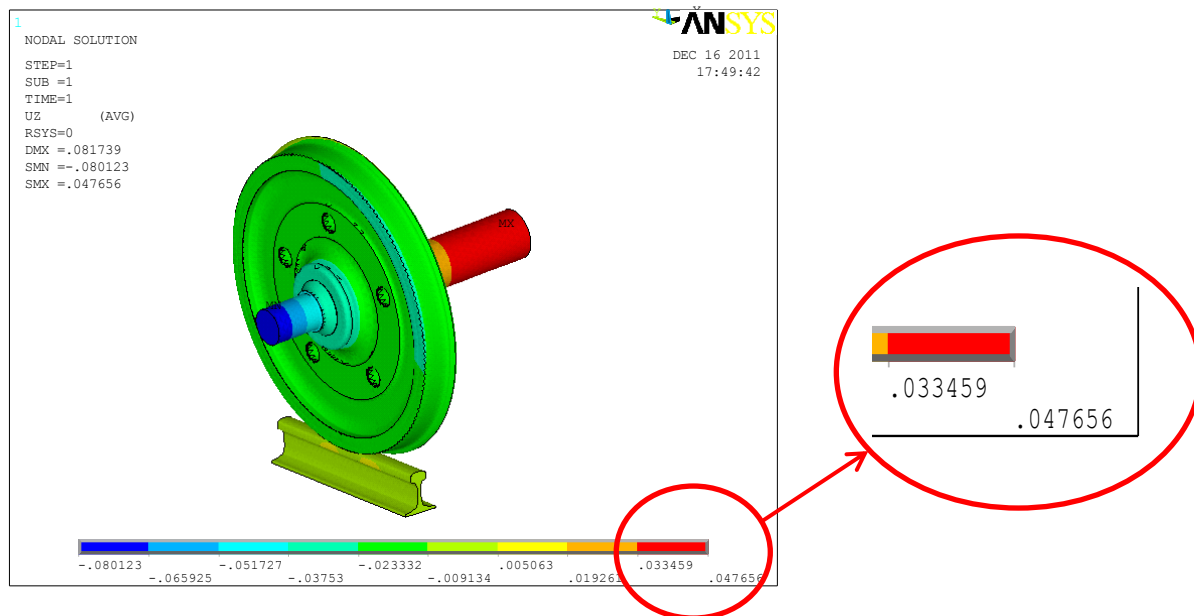


Figura 255. Desplazamientos verticales en el sistema rail-rueda-eje a escala 1:5 (Acero).

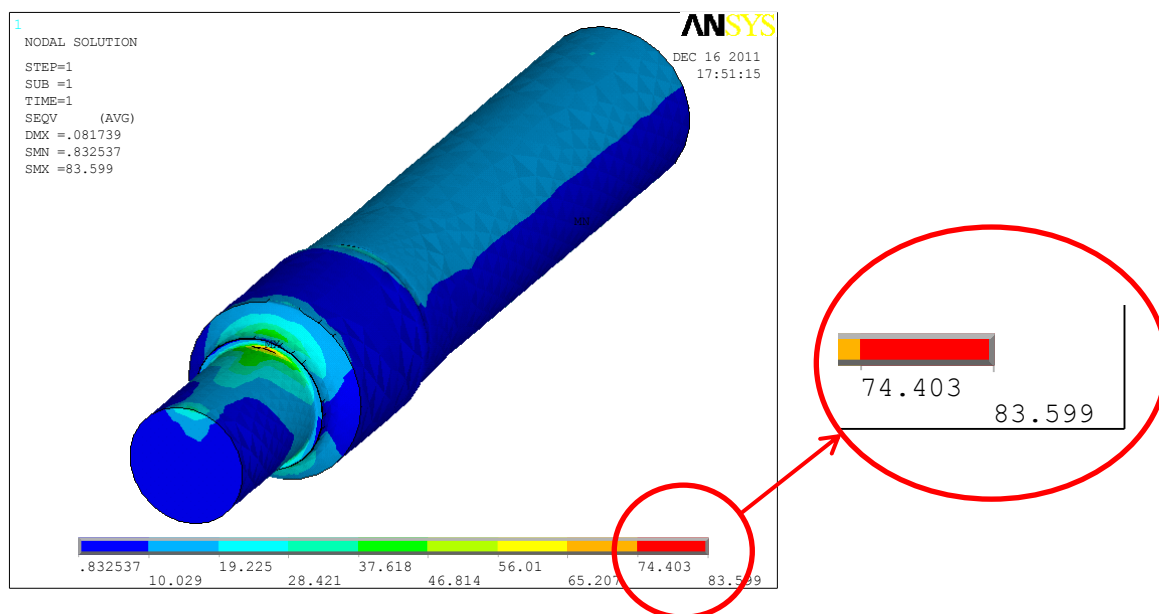


Figura 256. Campo tensional del eje a escala 1:5 (Acero).

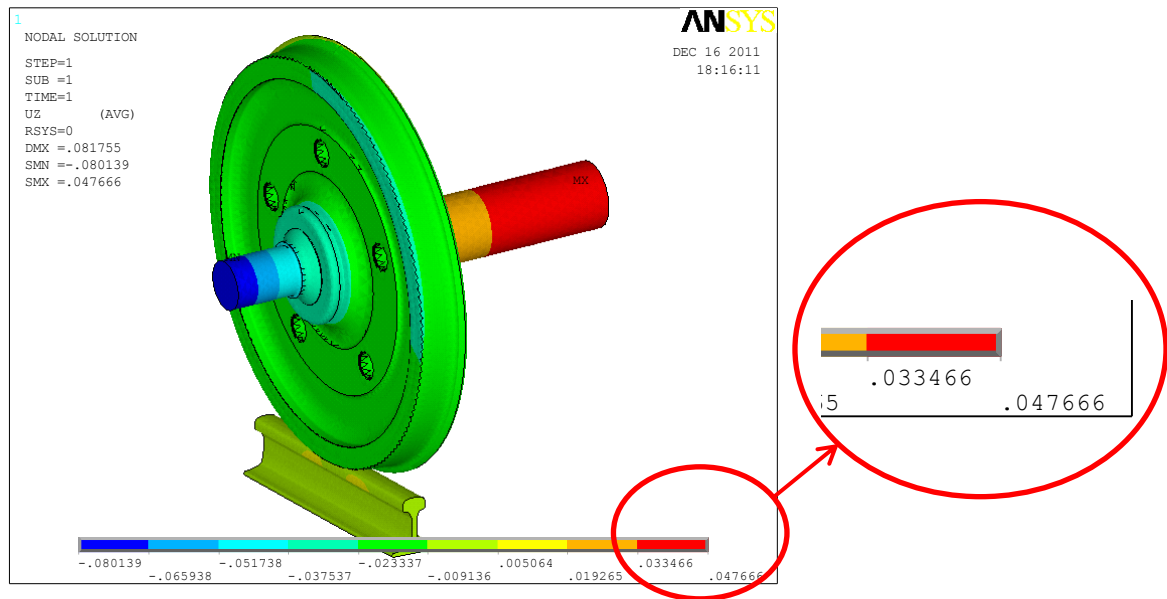


Figura 257. Desplazamientos verticales en el sistema rail-rueda-eje a escala 1:5 (Aluminio).

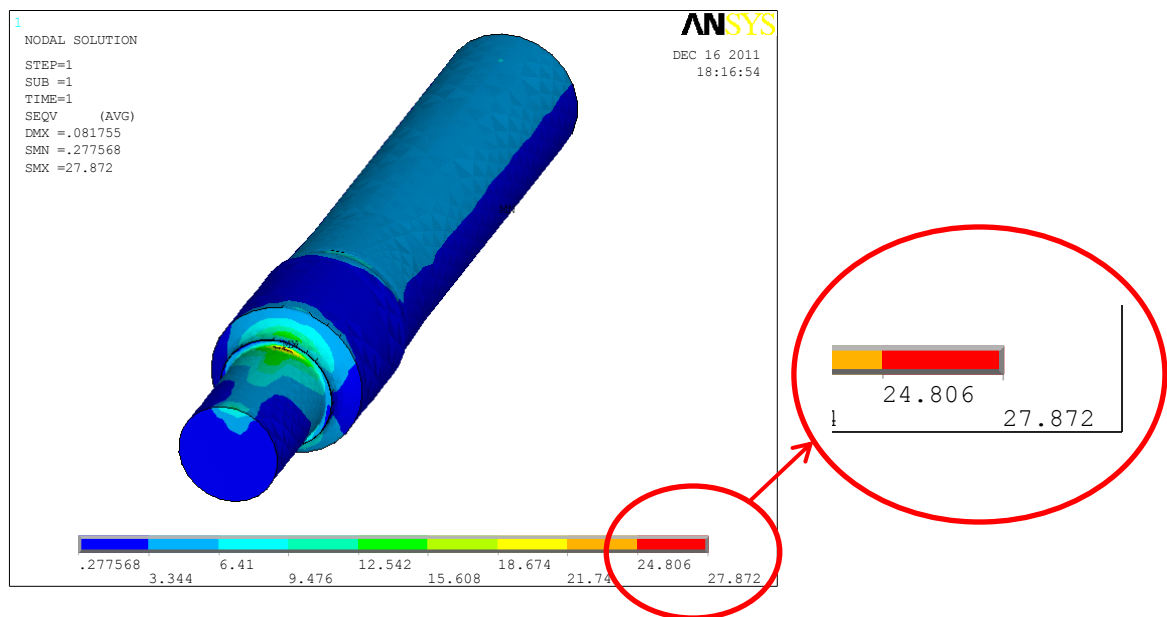


Figura 258. Campo tensional del eje a escala 1:5 (Aluminio).

Estudiando el conjunto constituido por hierro colado, en la figura 259 se observan los desplazamientos verticales que se producen sobre el conjunto a escala 1:5. Al igual que en los casos anteriores, en color rojo se presentan el máximo desplazamiento vertical hacia arriba en la sección media del eje, que toma un valor de 0,047818mm. Como se había supuesto, este desplazamiento no coincide, debido a la influencia del coeficiente de Poisson, con el estimado en la tabla 30, existiendo un error de éste respecto del simulado del 0,33% que se considerará despreciable.

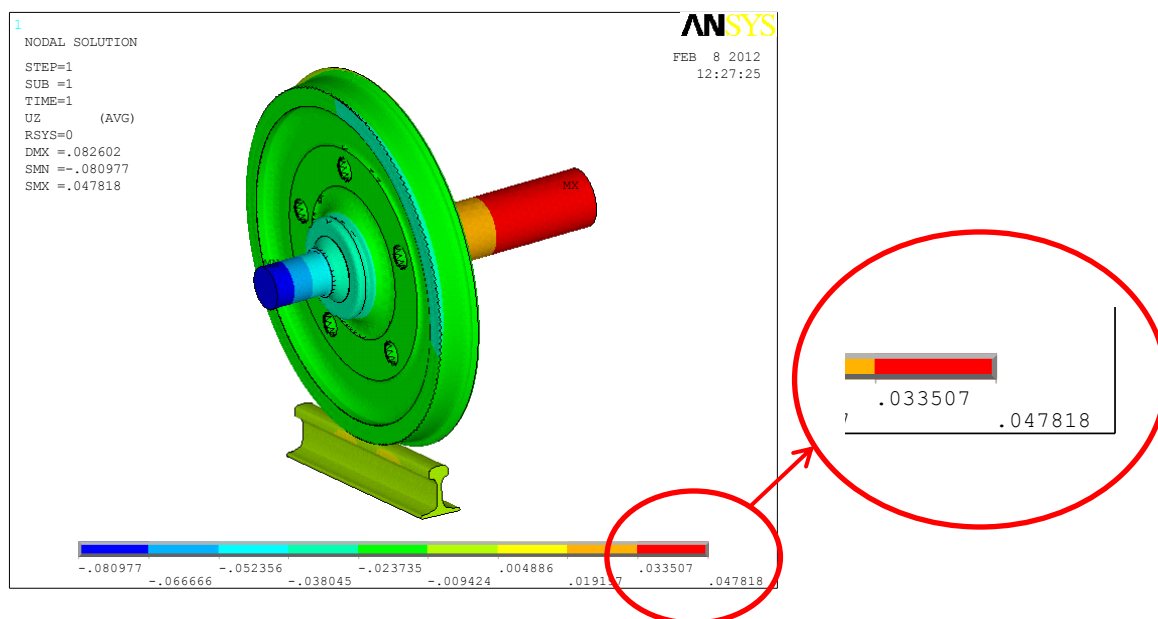


Figura 259. Desplazamientos verticales en el sistema r il-rueda-eje a escala 1:5 (Hierro colado).

Finalmente, en la figura 260 se muestra el eje a escala 1:5, en hierro colado, aislado del conjunto representándose su campo de tensiones cuando interactúa con el resto del conjunto. La tensión máxima toma un valor de 73,403MPa, con lo que el valor estimado conlleva un error del 5,37%, que también se considerará despreciable. Sorprende comprobar que el error correspondiente a las tensiones es superior al de los desplazamientos, por lo que se concluye que, a diferencia de lo estimado, con geometrías complejas, la relación existente entre tensiones y deformaciones ( stas últimas s  est n directamente afectadas por Poisson) hace que las primeras se vean altamente influidas por el coeficiente de Poisson.

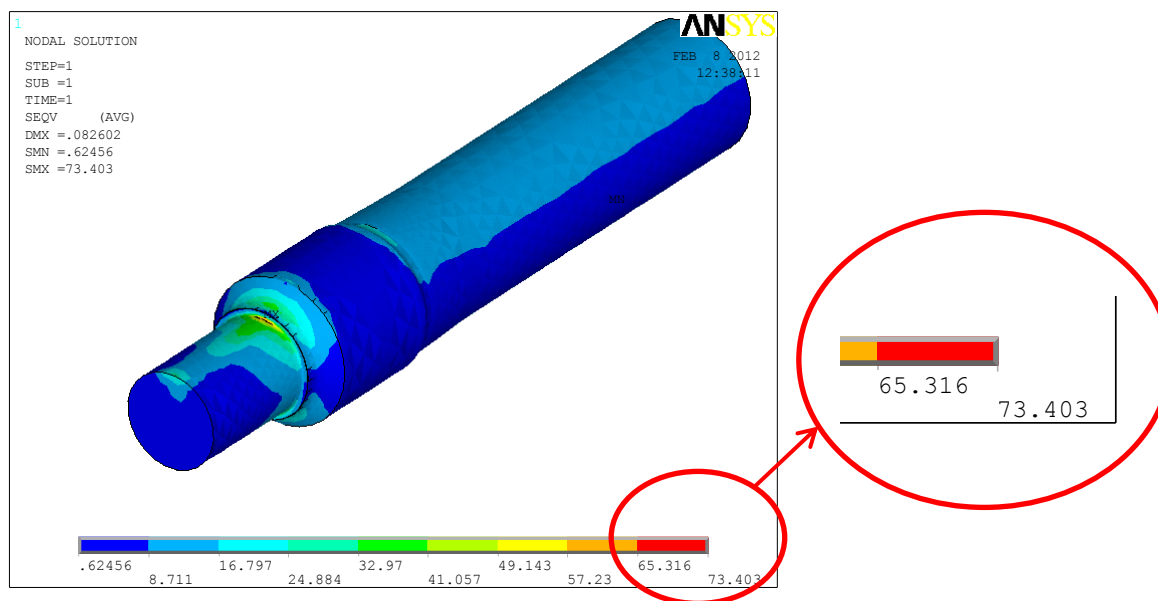


Figura 260. Campo tensional del eje a escala 1:5 (Hierro colado).

11.4.4 Análisis adimensional del conjunto eje-raíl-rueda escalado 1:4 mediante la aplicación del MEF.

De igual manera que se hizo en el análisis del conjunto eje-raíl-rueda escalado a 1:5, en el caso del conjunto escalado a 1:4, se obtienen, mediante el método de los elementos finitos, las tensiones y desplazamientos máximos producidos en el conjunto cuando éste se encuentre constituido por acero, aluminio o hierro colado.

Los desplazamientos verticales máximos que se producen en la sección media del eje se encuentran representados en las figuras 261 (acero), 263 (aluminio) y 265 (hierro forjado), tomando valores de, aproximadamente, 0,0595mm en los dos primeros casos y de 0,0597mm en el tercero de ellos. De nuevo, en el tercer caso se hace presente la influencia del coeficiente de Poisson, lo que genera un error del valor estimado en la tabla 30 respecto del simulado del 0,45% que, una vez más, se considerará despreciable.

En cuanto a las tensiones máximas sobre el eje, éstas se muestran en las figuras 262 (acero), 264 (aluminio) y 266 (hierro forjado). Los respectivos valores corresponden a 83,599 MPa, 27,839MPa (lo que corresponde a los datos estimados en la tabla 30) y 73,397MPa. Para este parámetro, el error del valor estimado respecto del simulado en el caso del conjunto formado por hierro colado debido a la influencia del coeficiente de Poisson corresponde a un 5,091%.

Con el modelo escalado a 1:4 se observa también el fenómeno detectado en el modelo a 1:5 según el cual el error correspondiente a las tensiones es superior al de los desplazamientos.

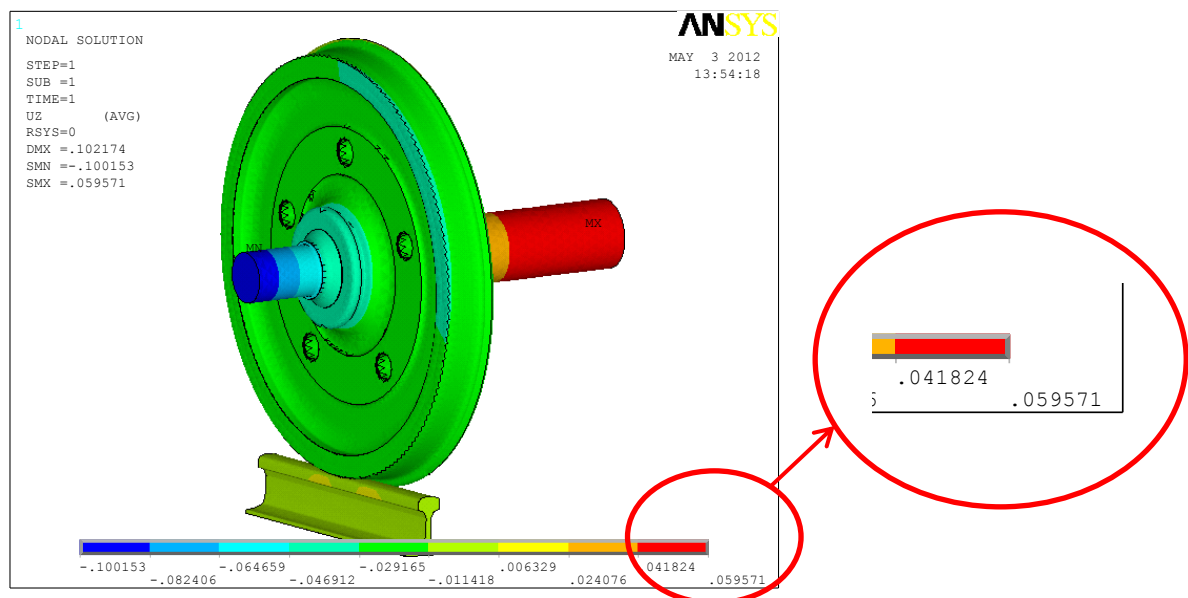


Figura 261. Desplazamientos verticales en el sistema raíl-rueda-eje a escala 1:4 (Acero).

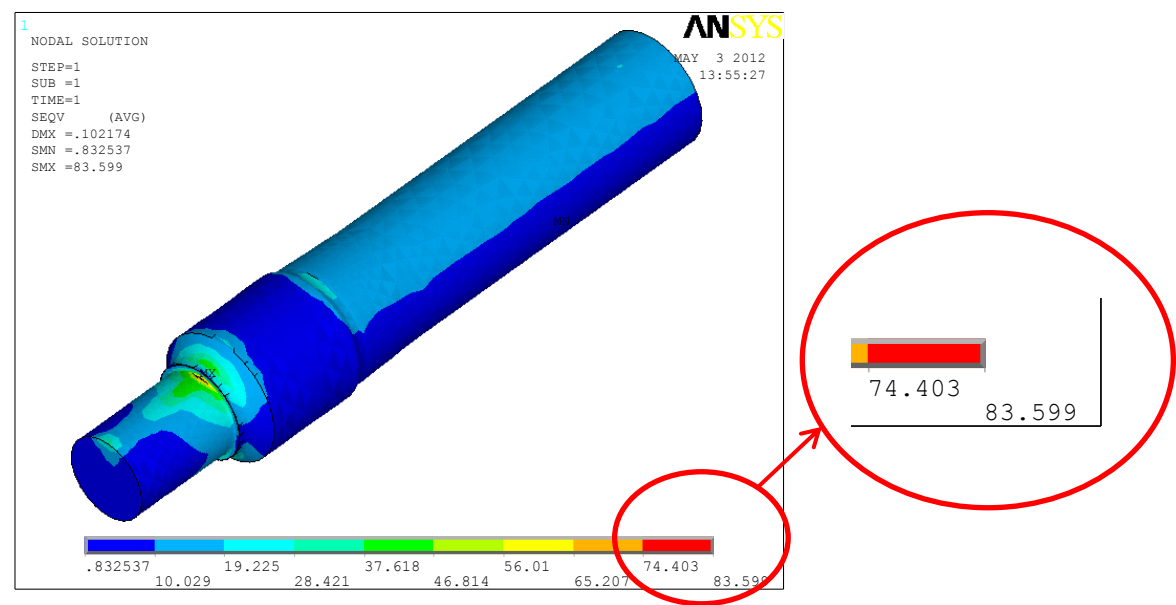


Figura 262. Campo tensional del eje a escala 1:4 (Acero).

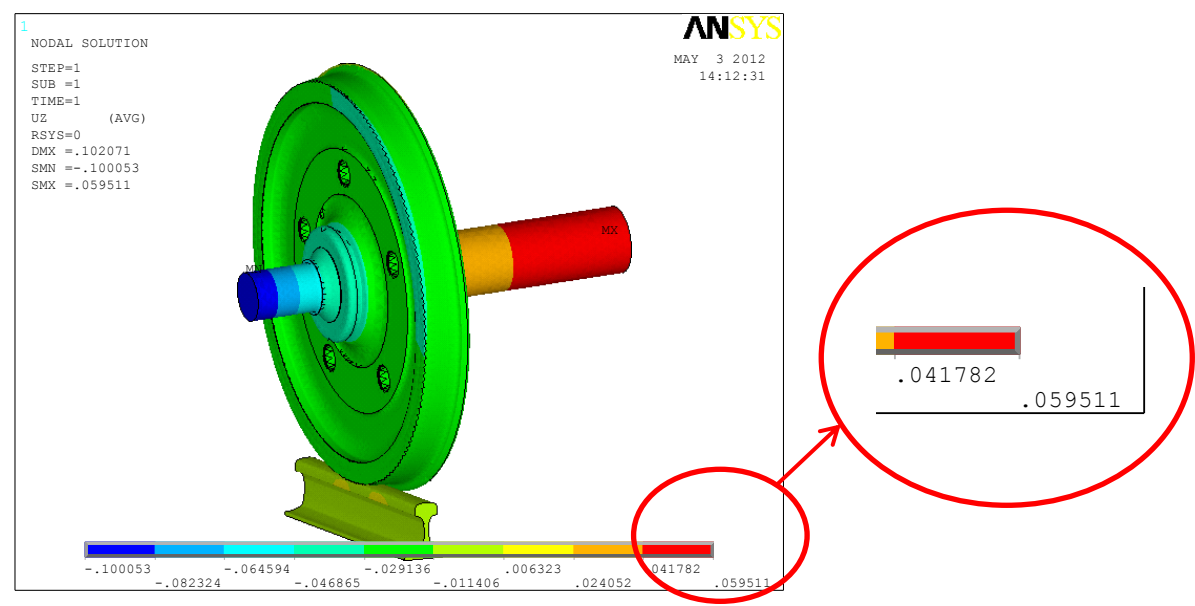


Figura 263. Desplazamientos verticales en el sistema rail-rueda-eje a escala 1:4 (Aluminio).

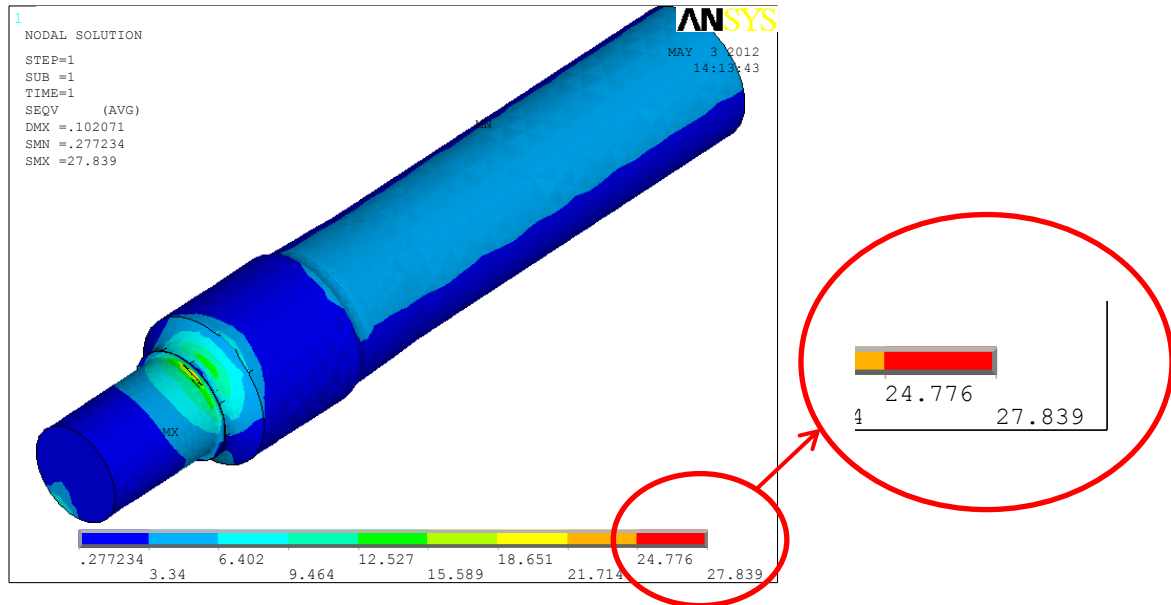


Figura 264. Campo tensional del eje a escala 1:4 (Aluminio).

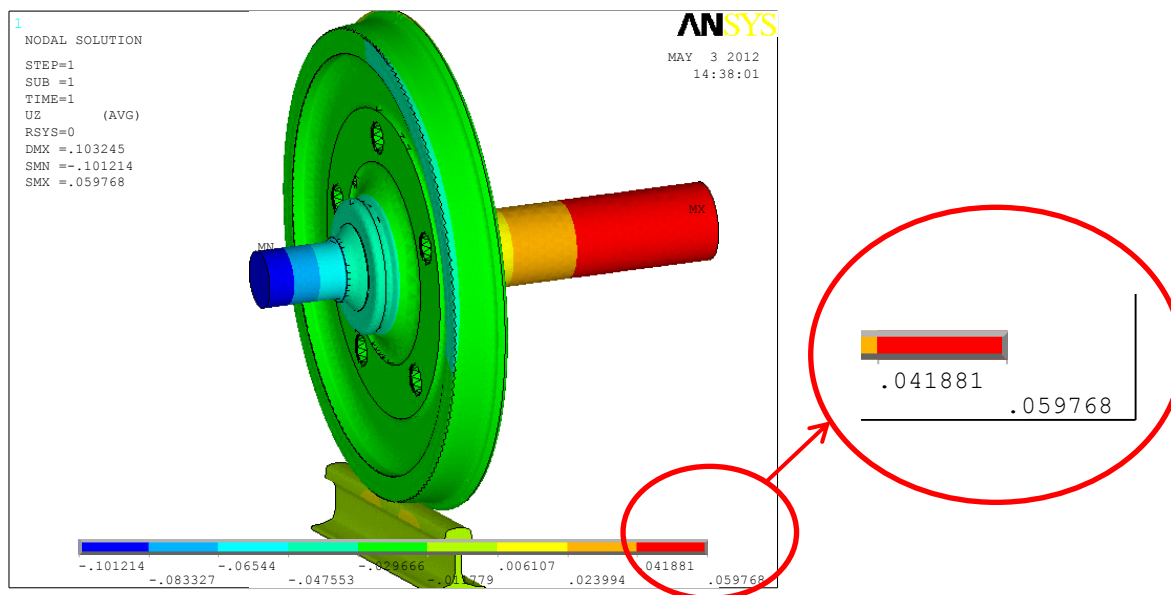


Figura 265. Desplazamientos verticales en el sistema raíz-rueda-eje a escala 1:4 (Hierro colado).

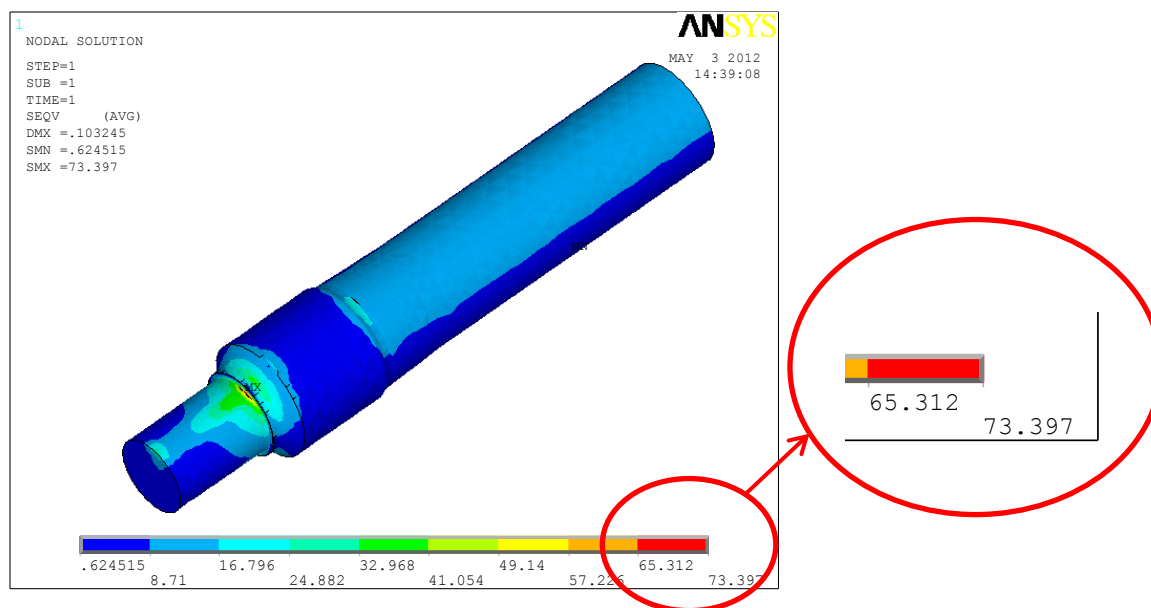


Figura 266. Campo tensional del eje a escala 1:4 (Hierro colado).

11.4.5 Análisis adimensional modal del eje ferroviario.

Se ha aplicado el método de los elementos finitos al cálculo de los primeros 20 modos propios de vibración del eje ferroviario libre en el espacio constituido de acero, aluminio y hierro colado. Dicho cómputo se ha llevado a cabo para los modelos escalados a 1:4 y a 1:5. En la tabla 31 se comparan los modos propios que se han considerado más representativos con los correspondientes al modelo original del eje (extraídos de las tablas desde la 7 a la 11 del capítulo 8) constituido de acero y a escala 1:1.

Tabla 31. Modos propios de vibración del eje ferroviario libre en el espacio (diferentes escalas y materiales).

Nº de modo propio	Frecuencias modos propios de vibración (Hz)						
	Modelo original escala 1:1	Modelos escala 1:5			Modelos escala 1:4		
	Acero	Acero	Aluminio	Hierro colado	Acero	Aluminio	Hierro colado
5	5,4294	27,147	26,725	25,784	21,717	21,38	20,627
7	14,503	72,516	71,389	68,922	58,013	57,111	55,138
8	21,725	108,62	106,94	106,04	86,9	85,548	84,829
9	26,882	134,41	132,32	127,87	107,53	105,86	102,3
11	34,769	173,85	171,14	165,15	139,08	136,91	132,12
13	40,931	204,66	201,47	194,89	163,73	161,18	155,91
14	45,776	228,88	225,32	223,44	183,11	180,26	178,75
16	55,194	275,97	271,68	262,88	220,77	217,34	210,3
18	69,848	349,24	343,81	332,66	279,39	275,05	266,13
20	71,362	356,81	351,26	348,32	285,45	281,01	278,66

En la tabla 32 se comprueba que, excepto en el caso del cilindro constituido por hierro colado (por la influencia del coeficiente de Poisson ya sobradamente mencionada), se cumplen las condiciones establecidas en los apartados 11.2.6 y 11.2.7 del presente capítulo.

Tabla 32. Relaciones existentes entre los diferentes modos propios de vibración del eje ferroviario libre en el espacio a diferentes escalas y constituido por diferentes materiales.

Nº de modo propio	Factor de escala simulado		Relaciones entre modos propios de vibración del eje de acero y de aluminio		Relaciones entre modos propios de vibración del eje de acero y de hierro colado	
	Modelos escala 1:5	Modelos escala 1:4	Modelos escala 1:5	Modelos escala 1:4	Modelos escala 1:5	Modelos escala 1:4
5	5,000000	3,999889	1,015790	1,015762	1,052862	1,052843
7	5,000069	4,000069	1,015787	1,015794	1,052146	1,052142
8	4,999770	4,000000	1,015710	1,015804	1,024330	1,024414
9	5,000000	4,000074	1,015795	1,015776	1,051146	1,051124
11	5,000144	4,000115	1,015835	1,015850	1,052679	1,052679
13	5,000122	4,000147	1,015834	1,015821	1,050131	1,050157
14	5,000000	4,000131	1,015800	1,015810	1,024347	1,024392
16	5,000000	3,999891	1,015791	1,015782	1,049795	1,049786
18	5,000000	3,999971	1,015794	1,015779	1,049841	1,049825
20	5,000000	4,000028	1,015800	1,015800	1,024374	1,024367

Por su parte, en la tabla 33 se indican los errores existentes en las relaciones teóricas entre modos propios de vibración halladas en las ecuaciones (11.2) y (11.3) respecto de las relaciones obtenidas mediante simulación (representadas en la tabla 32).

Tabla 33. Errores existentes en las relaciones teóricas y simuladas entre modos propios de vibración de diferentes materiales.

Nº de modo propio	Errores entre relaciones de modos propios de vibración del eje de acero y de aluminio (%)		Errores entre relaciones de modos propios de vibración del eje de acero y de hierro colado (%)	
	Modelos escala 1:5	Modelos escala 1:4	Modelos escala 1:5	Modelos escala 1:4
5	0,000818	0,003581	-0,010766	-0,008973
7	0,001184	0,000489	0,057278	0,057659
8	0,008764	-0,000514	2,699453	2,691533
9	0,000367	0,002286	0,152288	0,154335
11	-0,003566	-0,005026	0,006603	0,006603
13	-0,003431	-0,002171	0,248688	0,246190
14	-0,000097	-0,001154	2,697920	2,693642
16	0,000801	0,001678	0,280629	0,281442
18	0,000508	0,001951	0,276250	0,277714
20	-0,000147	-0,000136	2,695302	2,696017

11.4.6 Conclusiones del análisis adimensional de tensiones, desplazamientos y modos propios de vibración sobre el eje ferroviario.

Los resultados obtenidos en la comprobación del análisis adimensional por el método de los elementos finitos, considerando coeficiente de Poisson constante, verifican todas las hipótesis que se han llevado a cabo, lo que lleva a concluir que, con las relaciones entre desplazamientos, cargas, tensiones y modos propios de vibración obtenidas adimensionalmente, se podrán interpretar correctamente los resultados que se obtengan de los bancos de ensayos de los que se dispone en el Departamento (por extensión, las relaciones serían extrapolables a un banco de escala cualquiera).

No obstante, despreciar la influencia del coeficiente de Poisson es algo que, en trabajos futuros, tal y como se ha comentado en otros apartados, debe ser analizado en profundidad, sobre todo, una vez visto que, en función de la geometría, esta influencia puede comenzar a ser, en algunos casos, muy significativa.

Capítulo 12

Conclusiones y trabajos futuros.

12.1 Conclusiones.

Tras la lectura de toda la información recogida en el presente Proyecto Fin de Carrera así como de los diversos estudios y análisis realizados, considero que los objetivos marcados en el inicio del mismo se ven totalmente satisfechos y, de este modo, se concluye:

1. **Se ha puesto en conocimiento del lector nociones básicas relacionadas con el mundo del ferrocarril:** infraestructura/superestructura y enclaves ferroviarios. Además, **se han analizado los diferentes componentes del material rodante ferroviario, dando a conocer su influencia en el comportamiento del ferrocarril.** Por último, en lo que a conocimientos básicos del vehículo guiado por raíles se refiere, **se ha profundizado en el concepto de eje ferroviario y sus implicaciones.**
2. Se ha **generado el modelo del conjunto eje-raíl-rueda** para su utilización en una aplicación de elementos finitos.

3. Se ha aplicado el Método de los Elemento Finitos (MEF) a la obtención de las tensiones y desplazamientos existentes sobre el conjunto eje-raíl-rueda de un ferrocarril cuando éste se encuentra estáticamente sometido a carga.

La carga aplicada es de 250 kN, calculándose una tensión máxima sobre el eje ferroviario de 84 MPa, lo que cumple con lo establecido en la norma UNE-EN 13103:2010+A1, y un desplazamiento vertical hacia arriba máximo en la sección media de dicho eje de 0,238 mm, lo que se considera admisible.

4. Se han obtenido los primeros veinte modos propios de vibración del eje ferroviario modelado.
5. Se ha establecido la metodología y se ha llevado a cabo el cálculo y análisis a fatiga del eje ferroviario del conjunto eje-raíl-rueda sometido a una carga de 250 kN, aplicando técnicas analíticas y el MEF, con objeto de comparar los resultados obtenidos mediante ambas formas de estudio.

Utilizando técnicas analíticas se ha determinado una vida a fatiga de 994987,534 ciclos; mediante el MEF, dicha vida a fatiga es de 831700 ciclos, existiendo una diferencia del 20% del segundo resultado respecto del primero. Sin embargo, un eje ferroviario debe aguantar, como mínimo 10^8 ciclos entre revisiones. En términos analíticos esto significa que debe tener una vida a fatiga infinita, lo que se cumplirá cuando el eje esté sometido a un máximo de 211,65 kN. Ésta será, por tanto, la carga máxima que podrá soportar el eje, y no las 250 kN supuestas anteriormente.

6. Se ha introducido la Mecánica de la Fractura Lineal y Elástica (MFLE) y el estudio de ejes fisurados, aplicándose la técnica de la extensión virtual de la fisura mediante el MEF y procedimientos analíticos. De este modo, se ha planteado el proceso para la obtención del valor del Factor de Intensidad de Tensiones (FIT).

Considerando el eje objeto de estudio con una fisura de profundidad $a = 3$ mm y longitud $2h = 9,55$ mm, según la figura 204, se han aplicado dos cargas de valores 250kN/eje y 3200kN/eje. Para la primera carga, se ha obtenido, analíticamente, un FIT de $1,40\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ y, mediante el MEF y el método de la extensión virtual de la fisura, de $6,36\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$. Para la segunda carga, analíticamente se ha calculado un FIT de $13,17\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ y, mediante el MEF y el método de la extensión virtual de la fisura, de $20,50\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$. Estas diferencias pueden ser tan marcadas debido a los ínfimos desplazamientos relativos que se producen entre los bordes de fisura (ver tablas 14 y 15).

7. Considerando que, puesto que en ningún caso los resultados analíticos (obtenidos a partir de técnicas suficientemente robustas y afianzadas) y los obtenidos mediante simulación coinciden, el Método de los Elementos Finitos para ejes ferroviarios y, por extensión, para cualquier otro tipo de componente mecánico en general, es útil para la obtención de aproximaciones a la situación real que se da en un determinado modelo y para la reducción del número de ensayos (y con ello del coste de diseño), pero NUNCA pueden tomarse sus resultados como fidedignas representaciones de la realidad.
8. La conclusión anterior lleva a que sea necesario la realización de ensayos sobre ejes ferroviarios, ya que no se puede poner en servicio algo que únicamente haya sido simulado. Por ello, se han establecido los pasos a seguir para diseñar un

banco de ensayos de ejes ferroviarios a escala mediante la aplicación del análisis adimensional y del MEF, obteniéndose las diferentes relaciones entre los factores de escala y las tensiones, desplazamientos, cargas aplicadas, materiales utilizados y modos propios de vibración. Asimismo, se ha puesto de manifiesto la importancia que, en función de la geometría, puede tener el coeficiente de Poisson sobre dicho análisis adimensional.

12.2 Trabajos futuros.

En este análisis de ejes ferroviarios, quedan abiertos una serie de estudios que no han sido objeto de este proyecto y que se proponen contemplar como desarrollo futuro del mismo:

- En el proyecto, en el análisis adimensional, se ha despreciado la influencia del coeficiente de Poisson, por lo que sería de interés profundizar en este aspecto para conocer cómo se comportan los diferentes modelos escalados en función de dicho coeficiente (en lo que se refiere a la relación entre el factor de escala, y las tensiones, deformaciones, desplazamientos, etc.).
- Utilizar otros *softwares* comerciales de elementos finitos diferentes de ANSYS (Abacus, Catia, etc.) con los que comparar los resultados obtenidos en el presente proyecto.
- Desarrollar un estudio sobre los diferentes tipos de elementos finitos existentes (en ANSYS o en otras aplicaciones informáticas M.E.F.) y su precisión en el estudio de fisuras de ejes, de manera que el método de la extensión virtual de la fisura, tal y como se predice teóricamente, sea aplicable. Asimismo, podría ser interesante probar diferentes modelos de ejes y compararlos con el cálculo analítico hasta obtener el más adecuado para el estudio de las fisuras.
- El modelo de elementos finitos utilizado requiere, debido a la abundante cantidad de detalles con que se ha construido, tiempos de cálculo muy elevados, por lo que sería interesante desarrollar una optimización del mismo para disminuir el tiempo de computación, intentando que ésta siga representando de la manera más fiel posible la realidad.
- Construir un banco de ensayos para ejes ferroviarios a escala, bajo las condiciones y principios determinados en este trabajo y comprobar los resultados obtenidos en el mismo.
- Realizar una optimización geométrica del eje ya que, como se ha comprobado, las tensiones existentes son, en la mayor parte del mismo, mucho menores que el límite elástico. Por ello, a través de aplicaciones que utilicen el método de los elementos finitos, y una posterior comprobación analítica, se podría reducir la cantidad de material utilizado (y con ello también el peso) en las zonas en las que las tensiones sean mínimas (la mayoría) y reforzar las zonas más críticas (la minoría) con el ahorro económico que ello conllevaría.

- Emplear el método de los elementos finitos en el estudio del contacto entre la rueda y el eje, determinando los puntos críticos de dicha zona y las diferentes posibilidades de fallo existentes en la misma.
- Aplicar el método de los elementos finitos, considerando deformaciones plásticas y todo tipo de hipótesis y teorías necesarias, al estudio del contacto entre la rueda y el raíl; zona muy compleja y cuyo comportamiento es escasamente conocido hoy en día.
- Diseñar una aplicación informática de elementos finitos dedicada exclusivamente al cálculo de ejes ferroviarios que no sólo ofreciera resultados, sino que también aplicara, sin necesidad de la intervención del proyectista, la normativa vigente.
- Profundizar en el estudio de los modos propios de vibración y de las cargas que podrían generar la entrada en resonancia del eje ferroviario, así como, en caso de que fuese necesario, diseñar un sistema de amortiguamiento que previniese lo anteriormente comentado.
- Finalmente, el análisis de los efectos climáticos pudiera ser de gran importancia para mejorar la seguridad de la circulación ferroviaria (lluvia, nieve u otros que pudieran causar corrosión o diferentes efectos sobre los materiales que componen el eje).

Capítulo 13

Bibliografía y referencias.

[1] http://www.corriere.it/cronache/09_giugno_30/viareggi_esplosione_treno_adfee77a6533-11de-853b-00144f02aabc.shtml (Corriere della Sera, edición del 30 de junio de 2009), accedido en abril 2012.

[2] <http://ing.unne.edu.ar/dep/eol/fundamento/tema/T11F.pdf>, accedido en abril 2012.

[3] "Oferta pública de empleo. Convocatoria de factor de circulación de entrada. Conceptos ferroviarios", ADIF, 2007-2008.

[4] "Perspectiva ambiental 17. Trenes", Fundación Terra, Noviembre 1999.

[5] Apuntes de la asignatura Ferrocarriles, 5º de Ingeniería Industrial, Universidad Carlos III de Madrid, Curso 2011-2012.

[6] Julio Orduña Méndez. "Análisis a fatiga de un eje de tren de alta velocidad. Estudio con fisuras"/ Proyecto Fin de Carrera/ Universidad Carlos III de Madrid, 2011.

[7] Arturo Herreros Garrido. "Estudio de la defectología en ruedas ferroviarias"/ Proyecto Fin de Carrera/ Universidad Carlos III de Madrid, 2010.

[8] Juan Jurado Zurro. "Estudio del comportamiento dinámico de un vehículo ferroviario equipado con suspensión secundaria semiactiva utilizando lógica difusa" / Proyecto Fin de Carrera/ Universidad Carlos III de Madrid, 2010.

- [9] María de los Ángeles Miguel Alcañiz. "Modelado y análisis por elementos finitos de un eje ferroviario hueco usando Pro-engineer" / Proyecto Fin de Carrera/ Universidad Carlos III de Madrid, 2011.
- [10] O.C. Zienkiewicz. "El método de los elementos finitos", Editorial Reverté, 1982.
- [11] "Introducción al método de los elementos finitos", A. Carnicero/ Universidad Pontificia de Comillas.
http://www.profesores.frc.utn.edu.ar/industrial/sistemasinteligentes/FFlexible/Introduccion_al_MEF.pdf, accedido en julio 2010.
- [12] R. Courant, "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations", Bulletin of American Mathematical Society, 49 1-43, 1943.
- [13] M.J.Turner, R.W. Clough, H.C. Martin and L.J. Topp. "Stiffness and deflection analysis of complex structures", Journal of Aeronautical Sciences, V. 23, Nº 9, pp. 805-824, 1956.
- [14] J. T. Oden. "Some aspects of recent contributions to the mathematical theory of finite elements", Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, University of Alabama Press, Huntsville, 1972.
- [15] J. S. Przemieniecki. "Theory of Matrix Structural Analysis", Mc Graw-Hill, New York, 1968.
- [16] O.C. Zienkiewicz, G. Hollister. "Stress Analysis", John Wiley, London 1966.
- [17] O.C. Zienkiewicz, Y.K. Cheung. "The finite element method in structural and continuum mechanics" / Mc Graw-Hill, London, 1967.
- [18] O.C. Zienkiewicz. "El método de los elementos finitos" / Mc Graw-Hill CINME, Barcelona, 1994.
- [19] Daniel Varona Cano. "Diseño de Bogie y vagón destinados a ser utilizados como tolva de carbón", Proyecto Fin de Carrera/ Universidad Carlos III de Madrid, 2000.
- [20] <http://almec.files.wordpress.com/2007/10/resumen.pdf>, accedido en agosto 2010.
- [21] Alejandro Quesada González. "Empleo del método de los elementos finitos para la modelización del comportamiento a fatiga de elementos mecánicos", Tesis doctoral/Universidad Carlos III de Madrid, 2005.
- [22] M. Cuadrado, P. González, E. Romo. "Cálculo de plataformas ferroviarias mediante el empleo de modelos matemáticos avanzados". Ferroviaria 98. La Coruña, 1998.
- [23] "Question D117. Rapport nº 1. Exposé des Méthodes de recherche. Définitions." ORE (1983).
- [24] "Question D117. Rapport nº 18. 1^{ère} phase. Essais de Vienne-Arsenal" ORE (1983).
- [25] "Question D117. Rapport nº 25. 2^{ème} phase. Essais de Vienne-Arsenal et Derby." ORE (1983).

- [26] "Question D117. Rapport nº 27. Comparaison des résultats d'essais avec les previsions théoriques" ORE (1983).
- [27] "Question D117. Rapport nº 28. Abaques de comportement du système voie-fondation" ORE (1983).
- [28] Profillidis, V. "La voie ferrée et sa fondation. Modélisation mathématique". Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (1983).
- [29] "Etude en elastoplasticité par la MEF du comportement de la voie ferrée et sa fondation". Bulletin liaison du LCPC, nº 141 (1986).
- [30] Extrait de la notice du logiciel MEF "Rosalie". LCPC [9] Prud'Homme, M. A. "La voie".
- [31] "Fiche 714. Classification des voies des lignes du point de vue de la maintenance de la voie." UIC (1986)
- [32] Eva Marco Esteban. "Metodología para el análisis a fatiga mediante el código Pro-engineer: Aplicación a un eje ferroviario." Universidad Carlos III de Madrid, Proyecto Fin de Carrera, Octubre 2010.
- [33] Natalia García Gayol. "Simulación de un proceso de embutición mediante ANSYS LS-DYNA", Proyecto Final de Carrera/ Universidad Carlos III de Madrid, 2009.
- [34] Antonio Gauchía Babé. "Modelo de torsión de la superestructura de un autobús", Tesis doctoral/ Universidad Carlos III de Madrid, 2006.
- [35] Apuntes de la asignatura Tecnología de Máquinas, 4º de Ingeniería Industrial, Universidad Carlos III de Madrid, Curso 2010-2011.
- [36] Apuntes de la asignatura Fractura y fatiga de componentes mecánicos, 4º de Ingeniería Industrial, Universidad Carlos III de Madrid, Curso 2010-2011.
- [37] L.E. Kostas, R. Barrios D'ambra, H. Cóceres, I. Iturrioz. "Determinación del factor de intensidad de tensiones estático utilizando el Método de los Elementos Discretos", Comunicaciones Científicas y Tecnológicas. Departamento de Mecánica Aplicada, Facultad de Ingeniería de la UNNE, Argentina, año 2006.
- [38] T.L. Anderson. "Fracture Mechanics", CRC Press, 1995.
- [39] A. Carpinteri. "Shape change of surface cracks in round bars under cyclic axial loading.", 1993, International Journal of Fatigue 15, 21-26.
- [40] Y.S. Shih, J.J. Chen. "Analysis of fatigue crack growth on a cracked shaft.", 1997, International Journal of Fracture 19, 477-485.
- [41] ANSYS user's guide (versión 10.0), año 2008.
- [42] E. Oñate. "Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos. Análisis estático lineal", CINME, 1992.

[43] M. Dolores García León. "Estrategias para la resolución de grandes sistemas de ecuaciones lineales. Métodos de cuasi-Mínimo Residuo Modificados. ", Tesis doctoral/ Universidad de las Palmas de Gran Canaria, Marzo de 2003.

[44] <http://www.ansys.com/Products/Simulation+Technology/Structural+Mechanics>, accedido en mayo de 2012.

[45] <http://definicion.de/metodologia/>, accedido en mayo de 2012.

[46] Norma UNE-EN 13103:2010+A1. "Aplicaciones ferroviarias. Ejes montados y bogies. Ejes portadores. Métodos de diseño. ", Comité técnico AEN/CTN 25: Aplicaciones ferroviarias/AENOR. Versión oficial en español de la Norma Europea EN 13103:2009+A1:2010, septiembre 2011.

[47] R. Avilés. "Análisis de fatiga en máquinas", Thomson, 2005.

[48] Antonio Argüelles Íñiguez, "Análisis modal de un eje ferroviario mediante Pro/ENGINEER", Proyecto Fin de Carrera/ Universidad Carlos III de Madrid/Marzo de 2012.

Capítulo 14

Presupuesto.

En el presente capítulo se analizan los costes a los que ha dado lugar la elaboración de este proyecto, teniendo en cuenta los gastos de personal, así como de licencias de programas informáticos, equipos y material.

14.1 Gastos de personal.

A continuación se determinan las horas que han sido dedicadas para el desarrollo del trabajo:

- Tiempo de desarrollo del proyecto: 8 meses
- Días laborables/mes: 22
- Horas laborables/día: 8
- Total horas computables máximas imputables al proyecto: 2×1408
- Total horas imputables al proyecto: 782 (704 de Ing. Junior + 78 de Ing. Sénior)

Para el cálculo del coste de personal, se parte de la formación y de la experiencia de los integrantes del equipo de trabajo. Han participado en el desarrollo de este estudio un Ingeniero Industrial Junior (D. Francisco Julián Rebollo Giménez) y un Ingeniero Industrial Sénior (D. Higinio Rubio Alonso).

En función de los datos anteriores y sabiendo que los salarios medios mensuales de un Ingeniero Industrial Junior y de un Ingeniero Industrial Sénior son, respectivamente, 2066,21€ y 3456,27€, en la tabla 34 se muestra el resumen de los gastos de personal.

Tabla 34. Resumen de gastos de personal.

Apellidos y nombre	Categoría	Dedicación (%)	Coste mensual (€/mes)	Coste total (€)
Rubio Alonso, Higinio	Ingeniero Sénior	5,5	3456,27	1520,76
Rebollo Giménez, Francisco Julián	Ingeniero Junior	30	2066,21	4958,90
			TOTAL	6479,66

14.2 Gastos en licencias y equipos de informática.

Debe tenerse en cuenta que, a pesar de que el proyecto ha sido desarrollado a lo largo de 8 meses, algunas licencias se alquilan durante un año completo, por lo que se calculará la parte proporcional imputable al mismo.

Por otro lado, debe incluirse el coste generado por los equipos informáticos. Se han utilizado dos ordenadores: un PC y un sistema portátil. Para ambos se estimará la parte de amortización imputable.

De este modo, los gastos de licencias y equipos informáticos se resumen en la tabla 35.

Tabla 35. Resumen de licencias y equipos informáticos.

Descripción	Coste total(€)	Período de utilización (meses)	Amortización imputable (%)	Coste imputable (€)
Licencia ANSYS v10	41710	8	35	14598,5
Licencia Solid Edge v19	9850	2	6	591
Licencia ED-Tridim	0	0,5	0	0
Licencia Microsoft Office 2010	379	8	24	90,96
Equipo informático sobremesa	1500	8	15	225
Equipo informático portátil	800	8	17	136
			TOTAL	15641,46

14.3 Gastos adicionales.

En la tabla 36 se muestran los gastos adicionales que no han sido considerados anteriormente.

Tabla 36. Resumen de gastos adicionales.

CONCEPTO	COSTE (€)
Material de oficina	350
Desplazamientos	600
Impresión de documentos	400
Soporte y mantenimiento	500
Costes indirectos (2,5% de costes totales)	599,28
TOTAL	2449,28

14.4 Presupuesto final.

Finalmente, en la tabla 37 se resume el presupuesto final del presente Proyecto Fin de Carrera.

Tabla 37. Presupuesto final.

CONCEPTO	COSTE (€)
Gastos de personal	6479,66
Gastos en licencias y equipos informáticos	15641,46
Gastos adicionales	2449,28
Margen de beneficios (10%)	2730,04
TOTAL (Sin IVA)	27300,44
IVA (21%)	5733,09
TOTAL	33033,53

Anexo A

Aplicaciones y modelos matemáticos de interés en el método de los elementos finitos.

A.1 Flexión de vigas esbeltas. Teoría de Euler-Bernoulli. [42]

A.1.1 Teoría básica

La teoría de vigas clásica, o de Euler-Bernoulli, se basa en las tres hipótesis siguientes:

1. Los desplazamientos verticales de todos los puntos de una sección transversal son pequeños e iguales a los del eje de la viga x .

2. El desplazamiento lateral (según el eje y de la figura 267) es nulo.
3. Las secciones transversales normales al eje de la viga antes de la deformación permanecen planas y ortogonales a dicho eje después de la deformación.

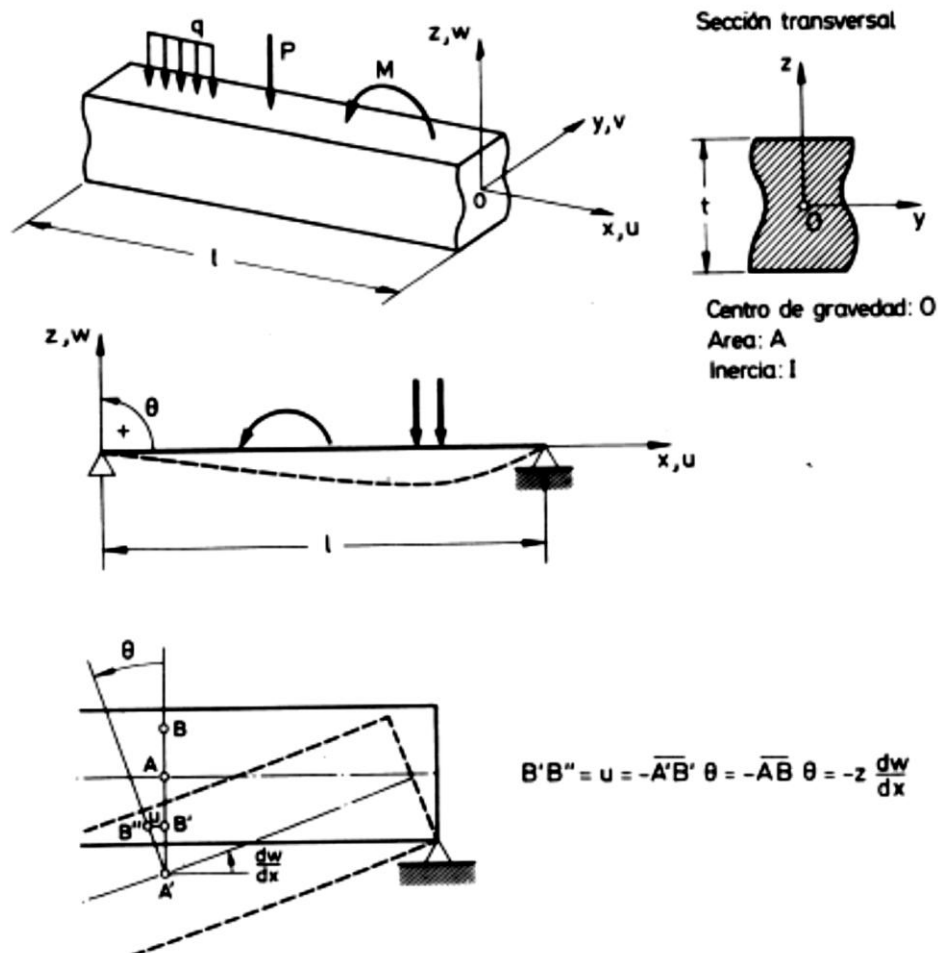


Figura 267. Viga convencional de Euler-Bernoulli.

Considérese una viga de longitud l , sección transversal de área A y momento de inercia I sobre la que actúan una serie de cargas verticales y momentos contenidos en el plano xx .

De acuerdo con las hipótesis anteriores, el campo de desplazamientos de un punto cualquiera se puede escribir como:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z\theta(x) \\ v(x, y, z) &= 0 \\ w(x, y, z) &= w(x) \end{aligned}$$

Por la hipótesis 3, el giro θ es igual a la pendiente de la deformada del eje (figura 267), es decir:

$$\theta = \frac{dw}{dx} \quad y \quad u = -z \frac{dw}{dx}$$

Las deformaciones en un punto se obtienen por:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2w}{dx^2}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

La única tensión no nula σ_x se relaciona con su correspondiente deformación ε_x por:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -zE \frac{d^2w}{dx^2}$$

Por otro lado, se define el momento flector positivo M de una sección (figura 268), como:

$$M = - \iint_A z \sigma_x dA = \iint_A z^2 E \frac{d^2w}{dx^2} dA = EI \frac{d^2w}{dx^2} = EI \chi$$

donde I es el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje y y χ la curvatura del eje de la viga ($\chi = \frac{d^2w}{dx^2}$).

Se supondrá que las fuerzas verticales repartidas q tienen sentidos opuestos al establecido como positivo para la flecha w , por otra parte, que los momentos exteriores son positivos si su sentido coincide con el positivo del giro (ver figura 268). En dichas circunstancias, el PTV para la viga se escribe como:

$$\iiint_V \delta \varepsilon_x \sigma_x dV = - \int_0^l \delta w q dx + \sum_{i=1}^p \delta w_i Z_i + \sum_{j=1}^q \delta \left(\frac{dw}{dx} \right)_j M_j$$

La integral sobre el volumen de la viga del primer miembro representa el trabajo de deformación virtual y se simplifica como sigue:

$$\begin{aligned} \iiint_V \delta \varepsilon_x \sigma_x dV &= \int_0^l \left[\iint_A -z \sigma_x dA \right] \delta \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right) dx = \int_0^l \delta \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right) EI \frac{d^2w}{dx^2} dx = \\ &= \int_0^l \delta \chi M dx \end{aligned}$$

Por consiguiente, el trabajo de deformación virtual se puede expresar por la integral sobre la longitud de la viga del producto del momento flector por la correspondiente curvatura virtual. [42]

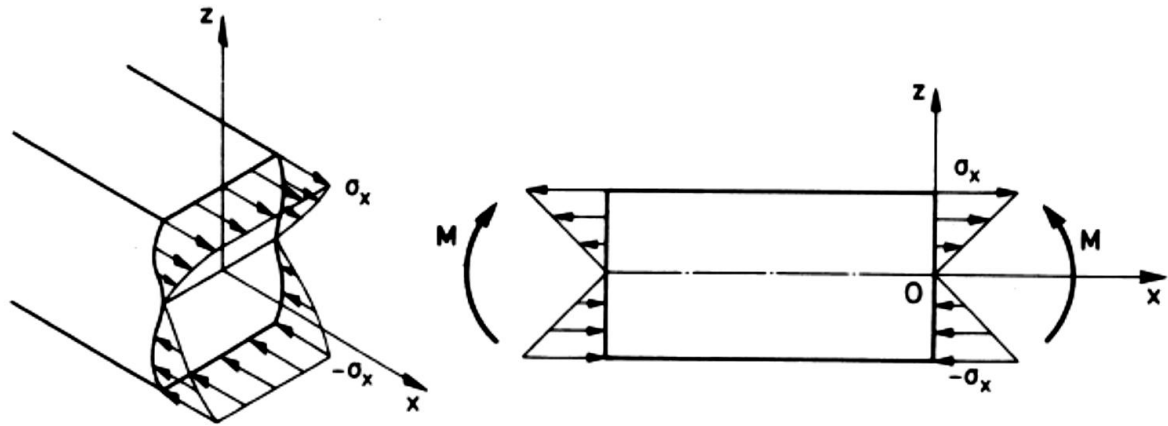


Figura 268. Convenio de signos para la tensión σ_x y el momento flector M .

A.1.2 Discretización en elementos finitos de dos nodos.

La incógnita fundamental del problema es la flecha w . No obstante, debido a que en la expresión del trabajo virtual interno aparecen segundas derivadas de w , se deben utilizar elementos de continuidad de clase C_1 (la primera y segunda derivada deben ser continuas) para evitar singularidades en el cálculo de las integrales. Esta condición se puede interpretar físicamente de manera sencilla teniendo en cuenta que dw/dx coincide con la pendiente de la deformada del eje de la viga. Por tanto, dicha derivada debe ser continua para garantizar que la deformada del eje describa una curva suave.

Así, el elemento más sencillo de viga de clase C_1 es el unidimensional de dos nodos (figura 269). La continuidad de las primeras derivadas obliga a tomar el giro como variable y, por consiguiente, el número total de variables nodales del elemento es cuatro (la flecha y el giro de cada nodo), que definen perfectamente una variación cúbica de la flecha.

$$w = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \quad (A.1)$$

Las constantes α_i se calculan sustituyendo adecuadamente los valores de la flecha y sus derivadas en los nodos en (A.1), lo que proporciona el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas siguiente:

$$\begin{cases} w_1 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 + \alpha_3 x_1^3 \\ \left(\frac{dw}{dx}\right)_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 x_1 + 3\alpha_3 x_1^2 \\ w_2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_2^3 \\ \left(\frac{dw}{dx}\right)_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 x_2 + 3\alpha_3 x_2^2 \end{cases}$$

Resuelto este sistema se puede reescribir la ecuación (A.1), tras sustituir convenientemente las expresiones de las α_i , como:

$$w = N_1 w_1 + \bar{N}_1 \frac{l^{(e)}}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)_1 + N_2 w_2 + \bar{N}_2 \frac{l^{(e)}}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)_2 \quad (A.2)$$

donde las funciones de forma del elemento vienen dadas por:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) & N_2 &= \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \\ \bar{N}_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) & \bar{N}_2 &= \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{aligned}$$

con $\xi = \frac{2}{l^{(e)}}(x - x_m)$ y $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ (A.3)

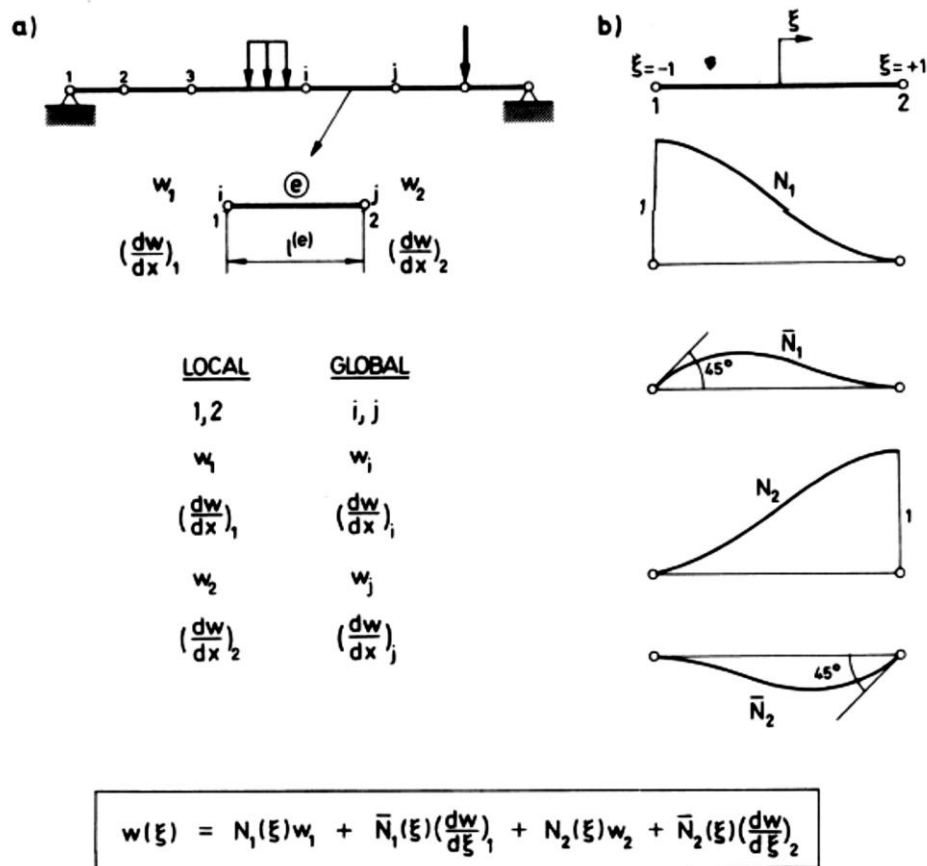


Figura 269. a) Elemento viga de Euler-Bernoulli de dos nodos. b) Variables nodales y funciones de forma Hermíticas.

La ecuación (A.2) puede reescribirse como:

$$w = Na^{(e)}$$

donde $N = [N_1, \overline{N_1}, N_2, \overline{N_2}]$ y $a^{(e)} = \left[w_1, \left(\frac{dw}{dx} \right)_1, w_2, \left(\frac{dw}{dx} \right)_2 \right]^T$ son las matrices de forma y el vector de movimientos (desplazamientos y giros) nodales del elemento.

La aproximación definida por la ecuación (A.2) se denomina Hermítica por coincidir las funciones de forma con polinomios de Hermite¹. La representación gráfica de las cuatro funciones de forma se muestra en la figura 269.

De (A.3) se deduce que $\frac{dx}{d\xi} = \frac{l^{(e)}}{2}$, con lo que:

$$dx = \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \quad ; \quad \frac{dw}{dx} = \frac{2}{l^{(e)}} \frac{dw}{d\xi} \quad ; \quad \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{4}{(l^{(e)})^2} \frac{d^2w}{d\xi^2} \quad (A.4)$$

Por consiguiente, la curvatura en un punto del elemento de coordenada ξ se obtiene haciendo uso de (A.2) y (A.4), con lo que resulta:

$$\begin{aligned} \chi = \frac{d^2w}{dx^2} &= \frac{4}{(l^{(e)})^2} \left(\frac{d^2N_1}{d\xi^2} w_1 + \frac{l^{(e)}}{2} \frac{d^2\overline{N_1}}{d\xi^2} \left(\frac{dw}{dx} \right)_1 + \frac{d^2N_2}{d\xi^2} w_2 + \frac{l^{(e)}}{2} \frac{d^2\overline{N_2}}{d\xi^2} \left(\frac{dw}{dx} \right)_2 \right) = \\ &= \left[\frac{6\xi}{(l^{(e)})^2}, \frac{(-1+3\xi)}{l^{(e)}}, -\frac{6\xi}{(l^{(e)})^2}, \frac{(1+3\xi)}{l^{(e)}} \right] \begin{pmatrix} w_1 \\ \left(\frac{dw}{dx} \right)_1 \\ \left(\frac{dw}{dx} \right)_2 \end{pmatrix} = B_f a^{(e)} \end{aligned}$$

siendo B_f la matriz de deformación de flexión o de curvatura del elemento.

Finalmente, la expresión de los trabajos virtuales de un solo elemento quedaría, combinando las expresiones anteriores, como:

$$\begin{aligned} \int_{l^{(e)}} \delta \chi EI_\chi dx &= \left(\int_{-1}^1 [\delta a^{(e)}]^T B_f^T (EI) B_f \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \right) a^{(e)} = \\ &= - \int_{-1}^1 [\delta a^{(e)}]^T N^T \frac{ql^{(e)}}{2} d\xi + \sum_{i=1}^2 \delta w_i Z_i + \sum_{j=1}^2 \delta \left(\frac{dw}{dx} \right)_j M_j \end{aligned}$$

¹Los polinomios de Hermite se definen como $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$

que tras operar en la forma usual conduce a la conocida expresión

$$K^{(e)} a^{(e)} - f^{(e)} = q^{(e)}$$

donde la matriz de rigidez del elemento de viga puede calcularse como:

$$K^{(e)} = \int_{-1}^1 B_f^T B_f \frac{(EI)l^{(e)}}{2} d\xi = \left(\frac{EI}{l^3} \right)^{(e)} \begin{pmatrix} 12 & 6l^{(e)} & -12 & 6l^{(e)} \\ 6l^{(e)} & 4(l^{(e)})^2 & -6l^{(e)} & 4(l^{(e)})^2 \\ -12 & -6l^{(e)} & 12 & -6l^{(e)} \\ 6l^{(e)} & 4(l^{(e)})^2 & -6l^{(e)} & 4(l^{(e)})^2 \end{pmatrix}$$

Asimismo, el vector de fuerzas nodales equivalentes debido a una carga uniformemente distribuida de intensidad $-q$ sobre el elemento es :

$$f^{(e)} = - \int_{-1}^1 N^T \frac{ql^{(e)}}{2} d\xi = -ql^{(e)} \left[\frac{1}{2}, \frac{l^{(e)}}{12}, \frac{1}{2}, \frac{l^{(e)}}{12} \right]^T$$

y el vector de fuerzas nodales de equilibrio $q^{(e)}$, necesario para el ensamblaje

$$q^{(e)} = [Z_1, M_1, Z_2, M_2]^T$$

A.2 Flexión de vigas de Timoshenko. [42]

A.2.1 Teoría básica

La teoría de vigas de Timoshenko comparte las hipótesis 1 y 2 de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli. Por contrapartida, la nueva hipótesis 3 establece que “las secciones planas normales al eje de la viga antes de la deformación, permanecen planas pero no necesariamente normales al eje después de la deformación”.

Esta hipótesis representa una mayor aproximación a la deformación real de la sección transversal en vigas de gran canto. A medida que la relación longitud/canto disminuye, las secciones transversales dejan de conservarse planas después de la deformación. Puede verse en la figura 270 que la hipótesis de Timoshenko supone tomar un giro medio para la sección, de manera que a efectos prácticos pueda seguir considerándose plana.

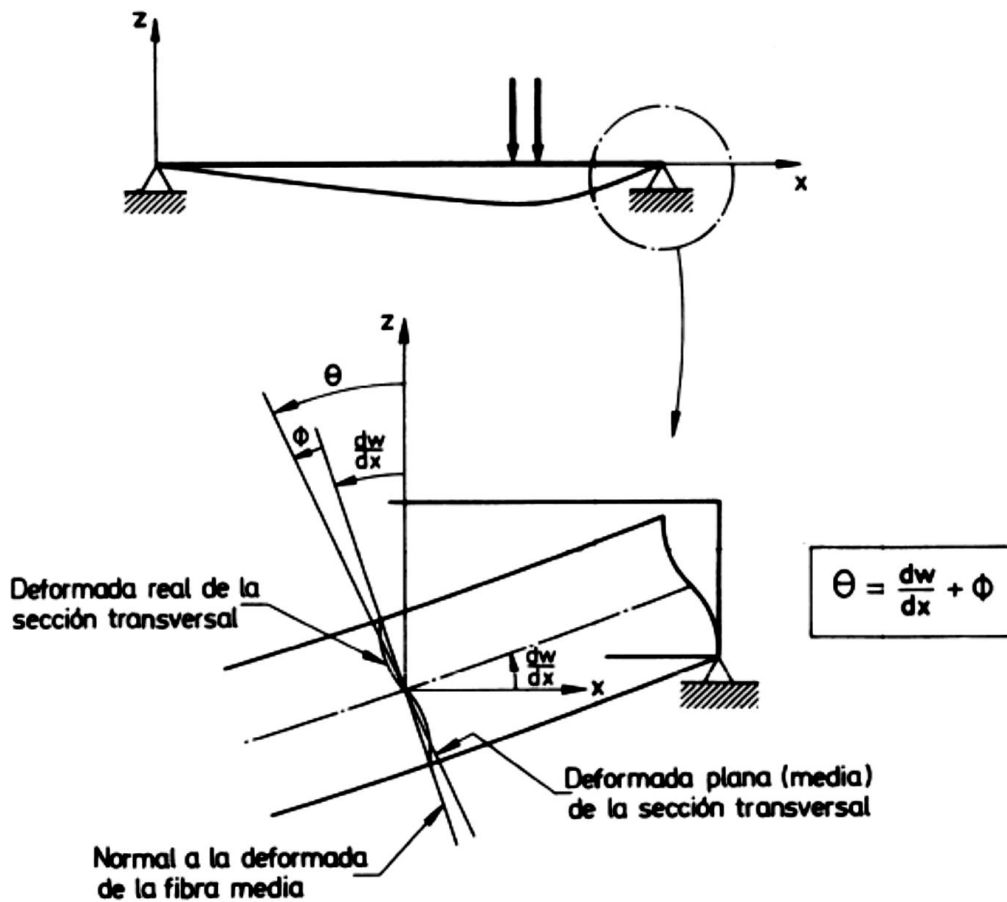


Figura 270. Teoría de flexión de vigas de Timoshenko. Giro de la sección normal a la fibra media.

De la figura 270 se deduce que el giro de la sección normal se puede expresar como:

$$\theta = \frac{dw}{dx} + \phi$$

donde $\frac{dw}{dx}$ es la pendiente de la deformada del eje de la viga y ϕ un giro adicional debido a la deformación por cortante como seguidamente se verá.

El campo de desplazamientos de la viga se expresa de manera similar a como ocurre en la teoría de Euler-Bernoulli pero, debido al giro adicional, en este caso resulta:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du}{dx} = -z \frac{d\theta}{dx} \\ \gamma_{xz} &= \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx} - \theta = -\phi \end{aligned}$$

Por consiguiente, la teoría de Timoshenko equivale a considerar el efecto de la deformación por cortante transversal, coincidiendo la magnitud de dicha deformación con el giro adicional de la normal ϕ .

Las dos tensiones no nulas σ_x y τ_{xz} se relacionan con las correspondientes deformaciones por:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = -zE \frac{d\theta}{dx} = -zE\chi$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right)$$

donde G es el módulo de rigidez y $\chi = \frac{d\theta}{dx}$ la curvatura del eje de la viga.

El momento flector y el esfuerzo cortante se definen, de acuerdo con los signos de la figura 271, como

$$M = - \iint_A z \sigma_x dA = EI \frac{d\theta}{dx} = EI\chi$$

$$Q = \iint_A \tau_{xz} dA = GA \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right) = GA\gamma_{xz}$$

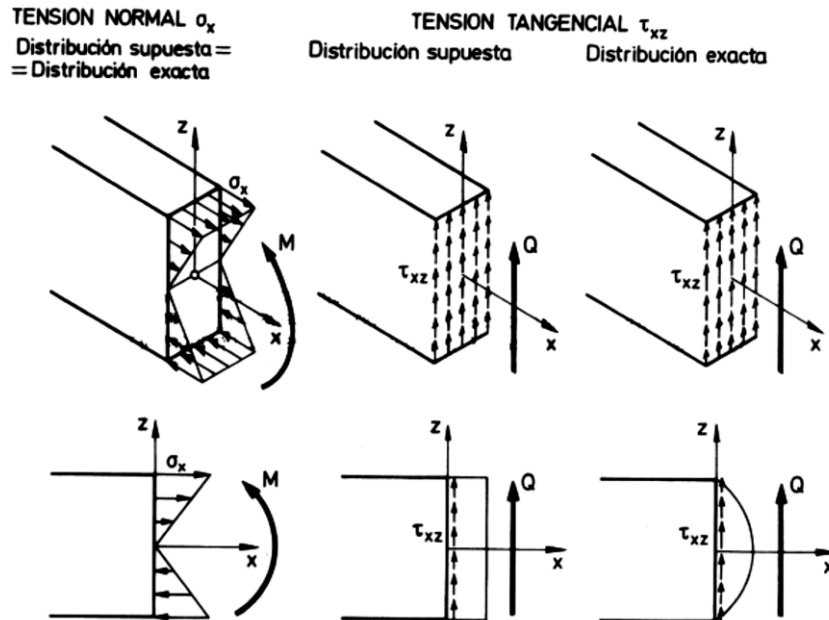


Figura 271. Teoría de vigas de Timoshenko. Distribución de tensiones normales y tangenciales.
Convenio de signos para momento flector y esfuerzo cortante.

Se puede observar que la variación de σ_x es lineal, lo cual puede considerarse como exacto dentro de la hipótesis de la teoría de vigas. Por el contrario, la variación de la tensión tangencial τ_{xz} con el canto se supone constante, lo cual está en clara contradicción con la

distribución polinómica de la teoría de vigas. Para sortear ese problema, teniendo en cuenta que se va a hacer uso de un planteamiento energético a partir del PTV, se acepta la hipótesis de tensión tangencial constante, pero modificada por un coeficiente de manera que el trabajo de deformación de la tensión tangencial constante coincida con el exacto de la teoría de vigas. Así se toma:

$$\tau_{xz} = \alpha G \gamma_{xz} \quad \text{y} \quad Q = \alpha A G \gamma_{xz} = A^* G \gamma_{xz}$$

donde α es el coeficiente de forma o de distorsión de la sección, y $A^* = A\alpha$ se denomina área reducida.

El nombre de coeficiente de distorsión se debe a que tiene en cuenta el efecto de que, en realidad, las secciones no se mantienen exactamente planas y tienen una distorsión longitudinal, tal y como se mostró en la figura 269.

La expresión del PTV se escribe ahora como:

$$\iiint_V (\delta \varepsilon_x \sigma_x + \delta \gamma_{xz} \tau_{xz}) = - \int_0^l \delta w q dx + \sum_{i=1}^p \delta w_i Z_i + \sum_{j=1}^q \delta \left(\frac{dw}{dx} \right)_j M_j \quad (A.5)$$

Combinando las distintas expresiones obtenidas en el desarrollo de la teoría de Timoshenko, el primer miembro de la ecuación (A.5) quedaría:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[-z \sigma_x \delta \left(\frac{d\theta}{dx} \right) + \tau_{xz} \delta \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right) \right] dV = \\ & = \int_0^l \left[\delta \chi \left(\iint_A -z \sigma_x dA \right) + \delta \gamma_{xz} \left(\iint_A \tau_{xz} dA \right) \right] dx = \\ & = \int_0^l [\delta \chi M + \delta \gamma_{xz} Q] dx = \int_0^l \left[\delta \left(\frac{d\theta}{dx} \right) EI \frac{d\theta}{dx} + \delta \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right) G A^* \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right) \right] dx \end{aligned}$$

Se observa en esta última ecuación que en el integrando aparece únicamente derivadas primeras de la flecha y el giro. Esto exige solamente su continuidad para garantizar la integrabilidad, lo que permite la utilización de elementos finitos de clase C_0 .

A.2.2 Elementos finitos para la flexión de vigas de Timoshenko.

Se considerará el elemento de viga de Timoshenko más sencillo de dos nodos. A diferencia de la teoría de Euler-Bernoulli, la flecha w y el giro θ son ahora variables independientes y de continuidad C_0 . Así se puede interpolar por separado cada una de ellas por:

$$w(\xi) = N_1(\xi)w_1 + N_2(\xi)w_2$$

$$\theta(\xi) = N_1(\xi)\theta_1 + N_2(\xi)\theta_2$$

donde w_1 , θ_1 y w_2 , θ_2 son las flechas y giros de los nodos 1 y 2 el elemento, respectivamente, y $N_1(\xi)$ y $N_2(\xi)$ son las típicas funciones lineales (figura 272).

Haciendo uso de las expresiones anteriores resulta:

$$\chi = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d\xi}{dx} \left[\frac{dN_1}{d\xi} w_1 + \frac{dN_2}{d\xi} w_2 \right]$$

y la deformación de cortante será:

$$\gamma_{xz} = \frac{dw}{dx} - \theta = \frac{d\xi}{dx} \left[\frac{dN_1}{d\xi} w_1 + \frac{dN_2}{d\xi} w_2 \right] - [N_1\theta_1 + N_2\theta_2]$$

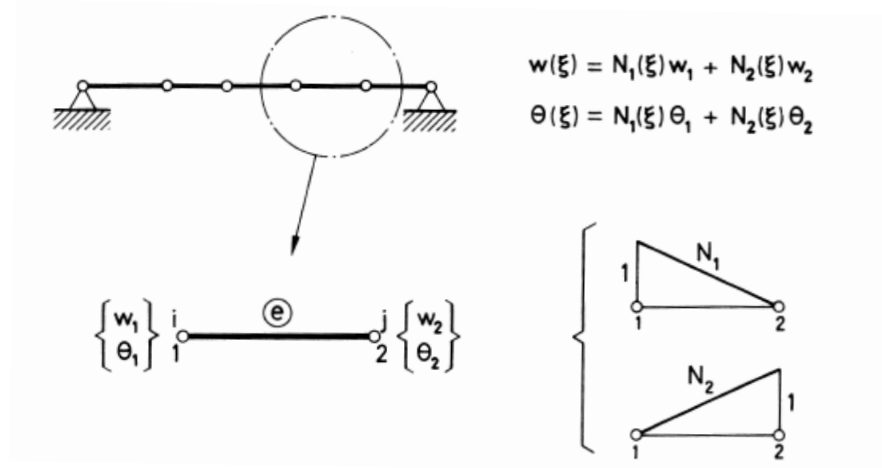


Figura 272. Elemento viga de Timoshenko de dos nodos. Interpolación de los movimientos y funciones de forma.

De la misma forma que se hizo en la teoría de Euler-Bernoulli, se pueden escribir las expresiones anteriores de forma matricial como

$$\chi = B_f a^{(e)}$$

$$\gamma_{xz} = B_c a^{(e)}$$

donde

$$B_f = \left[0, \frac{2}{l^{(e)}}, \frac{dN_1}{d\xi}, 0, \frac{2}{l^{(e)}}, \frac{dN_2}{d\xi} \right] = \left[0, \frac{-1}{l^{(e)}}, 0, \frac{1}{l^{(e)}} \right]$$

$$B_c = \left[\frac{2}{l^{(e)}}, \frac{dN_1}{d\xi}, -N_1, \frac{2}{l^{(e)}}, \frac{dN_2}{d\xi}, -N_2 \right] = \left[\frac{-1}{l^{(e)}}, \frac{-(1-\xi)}{2}, \frac{1}{l^{(e)}}, \frac{-(1+\xi)}{2} \right]$$

son las matrices de deformación de flexión y cortante del elemento, y

$$a^{(e)} = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]^T$$

es el vector de movimientos nodales del elemento.

A través de la combinación de las expresiones anteriores, la expresión de los trabajos virtuales quedaría:

$$\begin{aligned}
 [\delta a^{(e)}]^T \left(\int_{l^{(e)}} [B_f^T (EI) B_f + B_c^T (GA^*) B_c] dx \right) a^{(e)} = \\
 = [\delta a^{(e)}]^T \int_{l^{(e)}} \bar{N}^T (-q) dx + [\delta a^{(e)}]^T q^{(e)}
 \end{aligned}$$

y, tras simplificar los movimientos virtuales, resulta:

$$[K_f^{(e)} + K_c^{(e)}] a^{(e)} - f^{(e)} = q^{(e)}$$

donde

$$K^{(e)} = K_f^{(e)} + K_c^{(e)}$$

y

$$K_f^{(e)} = \int_{l^{(e)}} [B_f^T (EI) B_f] dx \quad y \quad K_c^{(e)} = \int_{l^{(e)}} [B_c^T (GA^*) B_c] dx \quad (A.6)$$

son las matrices de rigidez correspondientes a los efectos de flexión y cortante cuya suma es la matriz de rigidez total del elemento.

Por otra parte, el vector de fuerzas nodales equivalentes debido a una carga uniformemente distribuida de intensidad q sobre el elemento es:

$$f^{(e)} = - \int_{l^{(e)}} \bar{N}^T (q) dx \quad \text{con} \quad \bar{N} = [N_1, 0, N_2, 0] \quad (A.7)$$

y el vector de fuerzas nodales de equilibrio que permite ensamblar las contribuciones de los distintos elementos en la matriz de rigidez y en el vector de fuerzas globales queda:

$$q^{(e)} = [Z_1, M_1, Z_2, M_2]^T$$

Todas las anteriores integrales pueden transformarse sobre el dominio normalizado del elemento. Así, teniendo en cuenta que $dx = \frac{l^{(e)}}{2} d\xi$, las ecuaciones (A.6) y (A.7) se escriben como:

$$K_f^{(e)} = \int_{-1}^1 [B_f^T (EI) B_f] \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \quad ; \quad K_c^{(e)} = \int_{-1}^1 [B_c^T (GA^*) B_c] \frac{l^{(e)}}{2} d\xi$$

y

$$f^{(e)} = - \int_{-1}^1 \bar{N}^T(q) \frac{l^{(e)}}{2} d\xi$$

No obstante, la matriz de rigidez del elemento, también puede obtenerse por la expresión general:

$$K^{(e)} = \int_{l^{(e)}} [B^T DB] dx$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} B_f \\ B_c \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} EI & 0 \\ 0 & GA^* \end{pmatrix}$$

Sin embargo, el método aquí desarrollado permite identificar las contribuciones de flexión y cortante en la matriz de rigidez, lo que resulta de gran utilidad para integrar $K_f^{(e)}$ y $K_c^{(e)}$ con cuadraturas diferentes.

A.2.3 Elemento de viga de Timoshenko cuadrático.

La simplicidad de la formulación de los elementos viga de Timoshenko permite obtener fácilmente elementos de órdenes superiores. A continuación se considerará el elemento de tres nodos con funciones de forma cuadráticas (figura 273). En este caso, la flecha y el giro se interpolan como.

$$\begin{aligned} w(\xi) &= N_1(\xi)w_1 + N_2(\xi)w_2 + N_3(\xi)w_3 \\ \theta(\xi) &= N_1(\xi)\theta_1 + N_2(\xi)\theta_2 + N_3(\xi)\theta_3 \end{aligned}$$

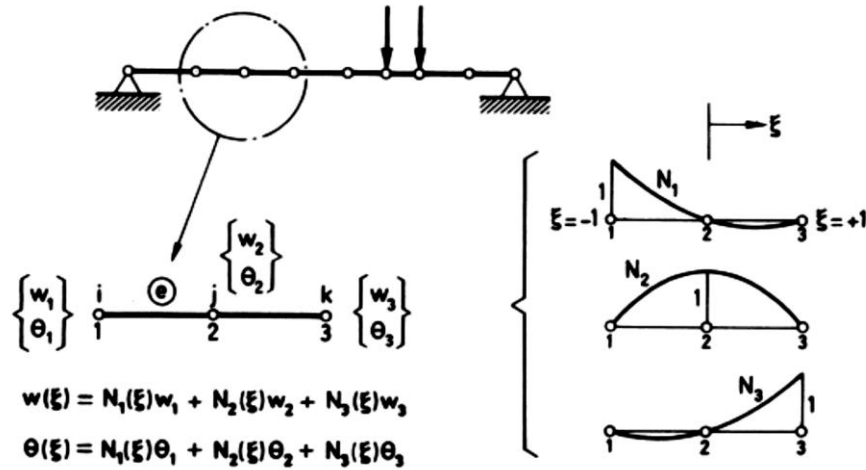


Figura 273. Elemento viga de Timoshenko de tres nodos. Incógnitas nodales y funciones de forma.

La geometría puede interpolarse de forma isoparamétrica de la manera siguiente:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3$$

De este modo, la derivada $\frac{dx}{d\xi}$ resulta:

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{dN_1}{d\xi} x_1 + \frac{dN_2}{d\xi} x_2 + \frac{dN_3}{d\xi} x_3$$

Considerando, por aspectos de sencillez, que el nodo 2 se encuentre en la mitad del elemento, se cumpliría que $\frac{dx}{d\xi} = \frac{l^{(e)}}{2}$.

La curvatura se obtiene por:

$$\chi = \frac{d\theta}{dx} = B_f a^{(e)}$$

donde

$$B_f = \left[0, \frac{dN_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}, 0, \frac{dN_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}, 0, \frac{dN_3}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right] = \frac{2}{l^{(e)}} \left[0, \xi - \frac{1}{2}, 0, -2\xi, 0, \xi + \frac{1}{2} \right]$$

y

$$a^{(e)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ con } a_i = \begin{pmatrix} w_i \\ \theta_i \end{pmatrix}$$

De forma similar, la deformación de cortante se expresa como:

$$\gamma_{xz} = \frac{dw}{dx} - \theta = B_c a^{(e)}$$

con

$$B_c = \left[\frac{dN_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}, -N_1, \frac{dN_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}, -N_2, \frac{dN_3}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}, -N_3 \right] =$$

$$= \frac{2}{l^{(e)}} \left[\xi - \frac{1}{2}, \frac{l^{(e)}}{4} (\xi^2 - \xi), -2\xi, \frac{l^{(e)}}{2} (1 - \xi^2), \xi + \frac{1}{2}, \frac{l^{(e)}}{4} (\xi^2 + \xi) \right]$$

La matriz de rigidez del elemento y el vector de fuerzas nodales equivalentes debidas a una fuerza q se obtienen de la misma forma que en el caso del elemento de dos nodos:

$$K^{(e)} = K_f^{(e)} + K_c^{(e)}$$

donde

$$K_f^{(e)} = \int_{-1}^1 [B_f^T (EI) B_f] \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \quad ; \quad K_c^{(e)} = \int_{-1}^1 [B_c^T (GA^*) B_c] \frac{l^{(e)}}{2} d\xi$$

y

$$f^{(e)} = - \int_{-1}^1 \bar{N}^T(q) \frac{l^{(e)}}{2} d\xi$$

Con

$$\bar{N} = [N_1, 0, N_2, 0, N_3, 0]$$

A.3 Teoría básica de sólidos tridimensionales.

[42]

A.3.1 Campo de desplazamientos.

Considerando un sólido tridimensional como el que se muestra en la figura 274, el movimiento de un punto en el espacio queda perfectamente definido por las tres componentes del vector de desplazamientos:

$$u = [u, v, w]^T$$

donde u, v, w son los desplazamientos del punto según los ejes cartesianos x, y, z , respectivamente.

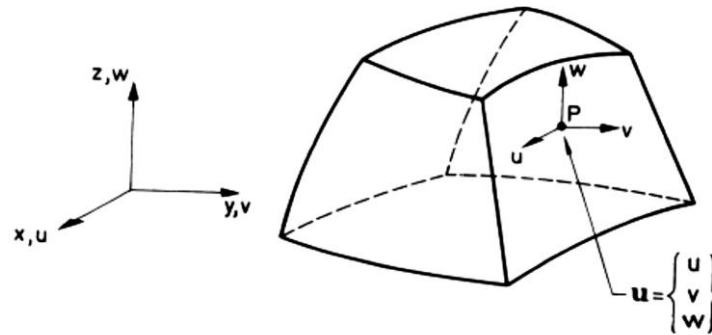


Figura 274. Sólido tridimensional. Vector de desplazamientos en un punto.

A.3.2 Campo de deformaciones.

Siguiendo la teoría clásica de la elasticidad tridimensional, el vector de deformación en un punto está definido por seis componentes de la siguiente forma:

$$\varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T$$

Con

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\delta u}{\delta x} ; \quad \varepsilon_y = \frac{\delta v}{\delta y} ; \quad \varepsilon_z = \frac{\delta w}{\delta z} \\ \tau_{xy} &= \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} ; \quad \tau_{xz} = \frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x} ; \quad \tau_{yz} = \frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y} \end{aligned}$$

donde $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ son las deformaciones normales y $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ las deformaciones tangenciales.

A.3.3 Campo de tensiones.

El vector de tensiones en un punto contiene seis componentes de tensión, conjugadas de las seis respectivas deformaciones. Así:

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}]^T$$

donde $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ son las tensiones normales y $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ son las tensiones tangenciales. En la figura 275 se muestran el convenio de signos de dichas tensiones.

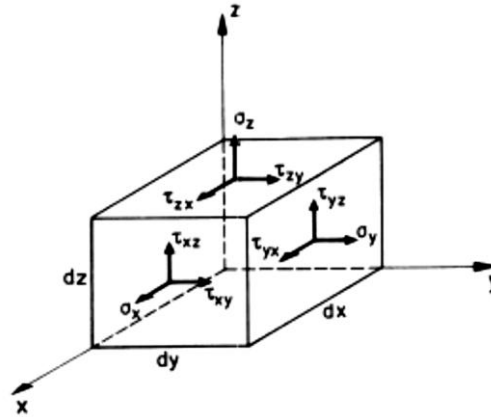


Figura 275. Convenio de signos para las tensiones en un elemento diferencial sólido tridimensional.

A.3.4 Relación tensión-deformación.

La relación entre las seis deformaciones y las seis tensiones viene expresada en el caso más general de elasticidad anisótropa por una matriz constitutiva de tamaño 6x6 simétrica y con veintidós coeficientes independientes. Un caso más simplificado es el del material ortótropo. Si x', y', z' son las direcciones principales de la ortotropía, las relaciones constitutivas pueden escribirse en dichos ejes como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x' &= \frac{1}{E_{x'}} \sigma_x' - \frac{\nu_{yx}'}{E_{y'}} \sigma_y' - \frac{\nu_{zx}'}{E_{z'}} \sigma_z' \\ \varepsilon_y' &= \frac{1}{E_{y'}} \sigma_y' - \frac{\nu_{xy}'}{E_{x'}} \sigma_x' - \frac{\nu_{zy}'}{E_{z'}} \sigma_z' \\ \varepsilon_z' &= \frac{1}{E_{z'}} \sigma_z' - \frac{\nu_{xz}'}{E_{x'}} \sigma_x' - \frac{\nu_{yz}'}{E_{y'}} \sigma_y' \\ \gamma_{xy}' &= \frac{\tau_{xy}'}{G_{xy}'} ; \quad \gamma_{xz}' = \frac{\tau_{xz}'}{G_{xz}'} ; \quad \gamma_{yz}' = \frac{\tau_{yz}'}{G_{yz}'}\end{aligned}$$

donde únicamente intervienen nueve parámetros independientes del material, ya que la simetría de la matriz constitutiva exige que:

$$\begin{aligned}E_{x'} \nu_{yx}' &= E_{y'} \nu_{xy}' \\ E_{y'} \nu_{zy}' &= E_{z'} \nu_{yz}' \\ E_{z'} \nu_{xz}' &= E_{x'} \nu_{zx}'\end{aligned}$$

A través de las ecuaciones anteriores se obtienen las relaciones entre tensiones y deformaciones en ejes locales x', y', z' , que luego debe transformarse a ejes globales.

Un caso muy usual en la práctica es el de elasticidad isótropa en que los nueve coeficientes independientes se reducen a dos: el módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson ν . En dicho caso, la ecuación constitutiva puede escribirse directamente en ejes globales x, y, z (teniendo en cuenta los vectores de deformaciones y tensiones iniciales) como:

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon^0) + \sigma^0$$

y la matriz constitutiva D viene dada por:

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Simétrica

A.3.5 Expresión del principio de los trabajos virtuales.

La ecuación del PTV se escribe, teniendo ahora en cuenta el carácter tridimensional del análisis, de la siguiente manera:

$$\iiint_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \iiint_V \delta u^T b dV + \iint_A \delta u^T t dA + \sum_i \delta a_i^T q_i$$

donde V y A son el volumen y la superficie del cuerpo sobre los que actúan las fuerzas de masa b , de superficie t y puntuales q_i , respectivamente.

A.3.6 Formulación de elementos finitos. Particularización para el elemento tetraédrico de cuatro nodos.

A.3.6.1 Discretización del campo de desplazamientos.

Se considera un sólido tridimensional discretizado en elementos tetraédricos de cuatro nodos (figura 276). El campo de desplazamientos en el interior de un elemento se puede aproximar por:

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \\ N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 \\ N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 + N_4 w_4 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i a^{(e)}$$

donde

$$N = [N_1, N_2, N_3, N_4] \quad ; \quad N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}$$

y

$$a^{(e)} = \begin{Bmatrix} a^{(e)}_1 \\ a^{(e)}_2 \\ a^{(e)}_3 \\ a^{(e)}_4 \end{Bmatrix} \quad ; \quad a^{(e)}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}$$

son, respectivamente, la matriz de funciones de forma y el vector de desplazamientos del elemento y de un nodo.

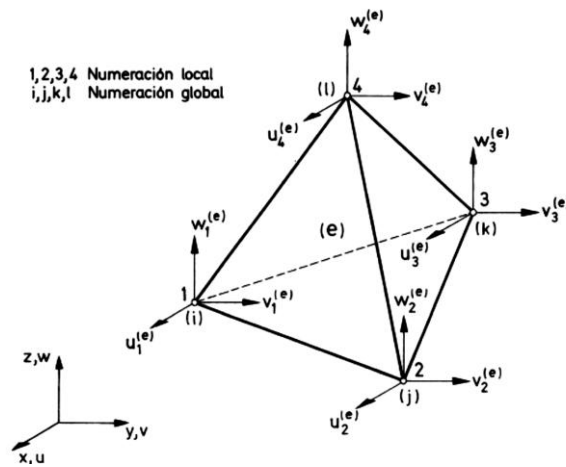


Figura 276. Elemento tetraédrico de cuatro nodos.

Cuatro nodos definen una variación lineal de los desplazamientos en las coordenadas xyz de manera que la expresión analítica de las funciones de forma N_i se puede escribir:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \\ v &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z \\ w &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z \end{aligned}$$

Las constantes α_i se obtienen sustituyendo adecuadamente las coordenadas de los nodos e igualando los desplazamientos a sus valores nodales. Como se ha utilizado la misma aproximación para todos los desplazamientos, basta con calcular las cuatro constantes para un solo desplazamiento. Así, considerando el desplazamiento u :

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 + \alpha_4 z_1 \\ u_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 + \alpha_4 z_2 \\ u_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 z_3 \\ u_4 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 y_4 + \alpha_4 z_4 \end{aligned}$$

resolviendo el sistema anterior y sustituyendo los valores de α_i encontrados se define, tras una ordenación de los términos:

$$u = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{6V^{(e)}} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) u_i$$

de donde se deduce que la función de forma del nodo i es:

$$N_i = \frac{1}{6V^{(e)}} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) u_i$$

donde $V^{(e)}$ es el volumen del elemento, y

$$\begin{aligned}
 a_i &= \det \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} & ; & \quad b_i = -\det \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix} \\
 c_i &= \det \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix} & ; & \quad d_i = -\det \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Obteniéndose, así, los distintos coeficientes para los valores de $i = 1, 2, 3, 4$ mediante la adecuada permutación cíclica de los subíndices i, j, k, l .

A.3.6.2 Matriz de deformación.

Sustituyendo la aproximación del campo de desplazamientos en la expresión del campo de deformaciones, se obtiene, para un elemento genérico de n nodos:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \left\{ \begin{array}{c} \frac{\delta N_i}{\delta x} u_i \\ \frac{\delta N_i}{\delta y} v_i \\ \frac{\delta N_i}{\delta z} w_i \\ \frac{\delta N_i}{\delta y} u_i + \frac{\delta N_i}{\delta x} v_i \\ \frac{\delta N_i}{\delta z} u_i + \frac{\delta N_i}{\delta x} w_i \\ \frac{\delta N_i}{\delta z} v_i + \frac{\delta N_i}{\delta y} w_i \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^n B_i a^{(e)}_i = B a^{(e)}$$

donde B es la matriz de deformación del elemento dada por:

$$B = [B_1, B_2, B_3, \dots, B_n]$$

siendo B_i la matriz de deformación del nodo i , con:

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\delta N_i}{\delta x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta N_i}{\delta y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta N_i}{\delta z} \\ \frac{\delta N_i}{\delta y} & \frac{\delta N_i}{\delta x} & 0 \\ \frac{\delta N_i}{\delta z} & 0 & \frac{\delta N_i}{\delta x} \\ 0 & \frac{\delta N_i}{\delta z} & \frac{\delta N_i}{\delta y} \end{bmatrix}$$

Dado que la matriz de deformación del elemento contiene tantas submatrices como nodos tiene el elemento, en el caso estudiado, se tendrá:

$$B = [B_1, B_2, B_3, B_4]$$

y haciendo uso de la ecuación de forma del nodo i , se obtiene:

$$B_i = \frac{1}{6V^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ d_i & 0 & b_i \\ 0 & d_i & c_i \end{bmatrix}$$

A.3.6.3 Matriz de rigidez del elemento.

Sustituyendo la ecuación constitutiva de un elemento isótropo en particular en ejes globales en la ecuación del PTV, se obtiene la ecuación de equilibrio del elemento:

$$K^{(e)} a^{(e)} - f^{(e)} = q^{(e)}$$

donde $K^{(e)}$ es la matriz de rigidez del elemento, $f^{(e)}$ es el vector de fuerzas equivalentes nodales y $q^{(e)}$ es el vector de las fuerzas nodales de equilibrio. La matriz de rigidez tiene la expresión:

$$K^{(e)}_{3n \times 3n} = \iiint_{V^{(e)}} B^T \begin{matrix} 3n \times 6 \\ D \\ 6 \times 6 \end{matrix} B \begin{matrix} 6 \times 3n \\ B \\ 6 \times 3n \end{matrix} dV$$

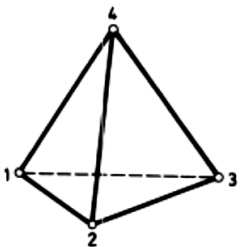
y una submatriz de rigidez típica, relacionando los nodos i y j del elemento, se escribe como:

$$K^{(e)}_{3 \times 3} = \iiint_{V^{(e)}} B_i^T \begin{matrix} 3 \times 6 \\ D \\ 6 \times 6 \end{matrix} B_j \begin{matrix} 6 \times 3n \\ B_j \\ 6 \times 3n \end{matrix} dV$$

En particular, para el elemento tetraédrico de 4 nodos se puede encontrar una forma explícita sencilla de $K^{(e)}_{ij}$, puesto que todas las cantidades subintegrales son constantes, como:

$$K^{(e)}_{ij} = B_i^T D B_j V^{(e)}$$

La expresión desarrollada de $K^{(e)}_{ij}$ para este elemento se representa en la figura 277.



$$u_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}$$

$$K^{(e)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(e)} & K_{12}^{(e)} & K_{13}^{(e)} \\ & K_{22}^{(e)} & K_{23}^{(e)} \\ \text{Simétrica} & & K_{33}^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$K_{ij}^{(e)} = \frac{1}{36V^{(e)}} \begin{bmatrix} (d_{11}b_i b_j + d_{44}c_i c_j + d_{55}d_i d_j) & (d_{12}b_i c_j + d_{44}c_i b_j) & (d_{13}b_i d_j + d_{55}d_i b_j) \\ (d_{21}c_i b_j + d_{44}b_i c_j) & (d_{22}c_i c_j + d_{44}b_i b_j + d_{66}d_i d_j) & (d_{23}c_i d_j + d_{66}d_i c_j) \\ (d_{31}d_i b_j + d_{55}b_i d_j) & (d_{32}d_i c_j + d_{66}c_i d_j) & (d_{33}d_i d_j + d_{55}b_i b_j + d_{66}c_i c_j) \end{bmatrix}$$

d_{ij} son los elementos de la matriz constitutiva D
 b_i, c_i, d_i son los parámetros de las funciones de forma N_i

Figura 277. Forma explícita de la submatriz de rigidez $K^{(e)}_{ij}$ para el elemento tetraédrico de 4 nodos.

A.3.6.4 Vector de fuerzas nodales equivalentes.

El vector de fuerzas nodales equivalentes $f^{(e)}$ tiene la expresión siguiente:

$$f^{(e)} = \iiint_{V^{(e)}} N^T b dV + \iint_{A^{(e)}} N^T t dA + \iiint_{V^{(e)}} B^T D \varepsilon^0 dV - \iiint_{V^{(e)}} B^T \sigma^0 dV = f^{(e)}_b + f^{(e)}_t + f^{(e)}_\varepsilon + f^{(e)}_\sigma$$

donde la primera integral representa el vector de fuerzas de volumen, la segunda, el de fuerzas de superficie; y la tercera y cuarta los vectores de fuerzas debidas a deformaciones y tensiones iniciales, respectivamente.

Es fácil encontrar una forma explícita del vector de fuerzas nodales equivalentes del elemento tetraédrico de cuatro nodos, tal y como se muestra a continuación:

- Fuerzas de volumen

$$f^{(e)}_b = \begin{Bmatrix} f^{(e)}_{b1} \\ f^{(e)}_{b2} \\ f^{(e)}_{b3} \\ f^{(e)}_{b4} \end{Bmatrix} = \iiint_{V^{(e)}} N^T b dV$$

con

$$f^{(e)}_{bi} = \iiint_{V^{(e)}} N^T_i b dV = \frac{V^{(e)}}{4} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}$$

- Fuerzas de superficie

$$f^{(e)}_t = \begin{Bmatrix} f^{(e)}_{t1} \\ f^{(e)}_{t2} \\ f^{(e)}_{t3} \\ f^{(e)}_{t4} \end{Bmatrix} = \iint_{A^{(e)}} N^T t dA$$

con

$$f^{(e)}_{ti} = \iint_{A^{(e)}} N^T_i t dA$$

El vector de fuerzas de superficie depende de la cara del elemento sobre el cual actúa la carga. Así, se tiene:

➤ *Fuerza actuando sobre la cara definida por los nodos 1-2-3*

$$f^{(e)}_t = \frac{A^{(e)}_{123}}{3} = \{t_x, t_y, t_z, t_x, t_y, t_z, t_x, t_y, t_z, 0, 0, 0\}^T$$

donde $A^{(e)}_{123}$ es el área de la cara del elemento definida por los nodos 1, 2 y 3. Los tres últimos términos son nulos porque N_4 vale 0 sobre dicha cara.

- *Fuerza actuando sobre la cara definida por los nodos 1-2-4*

$$f_t^{(e)} = \frac{A^{(e)}_{124}}{3} = \{t_x, t_y, t_z, t_x, t_y, t_z, 0, 0, 0, t_x, t_y, t_z\}^T$$

- *Fuerza actuando sobre la cara definida por los nodos 2-3-4*

$$f_t^{(e)} = \frac{A^{(e)}_{234}}{3} = \{0, 0, 0, t_x, t_y, t_z, t_x, t_y, t_z, t_x, t_y, t_z\}^T$$

- *Fuerza actuando sobre la cara definida por los nodos 1-3-4*

$$f_t^{(e)} = \frac{A^{(e)}_{134}}{3} = \{t_x, t_y, 0, 0, 0, t_z, t_x, t_y, t_z, t_x, t_y, t_z\}^T$$

- Fuerzas debidas a deformaciones iniciales

$$f_\varepsilon^{(e)} = \begin{Bmatrix} f_{\varepsilon 1}^{(e)} \\ f_{\varepsilon 2}^{(e)} \\ f_{\varepsilon 3}^{(e)} \\ f_{\varepsilon 4}^{(e)} \end{Bmatrix} = \iiint_{V^{(e)}} B^T D \varepsilon^0 dV$$

donde

$$f_{\varepsilon i}^{(e)} = \iiint_{V^{(e)}} N^T_i b dV = \frac{1}{6} \begin{Bmatrix} (d_{11}\varepsilon_x^0 + d_{12}\varepsilon_y^0 + d_{13}\varepsilon_z^0)b_i \\ (d_{21}\varepsilon_x^0 + d_{22}\varepsilon_y^0 + d_{23}\varepsilon_z^0)c_i \\ (d_{31}\varepsilon_x^0 + d_{32}\varepsilon_y^0 + d_{33}\varepsilon_z^0)d_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

donde d_{ij} es el término ij de la matriz constitutiva.

- Fuerzas debidas a tensiones iniciales

$$f_\sigma^{(e)} = \begin{Bmatrix} f_{\sigma 1}^{(e)} \\ f_{\sigma 2}^{(e)} \\ f_{\sigma 3}^{(e)} \\ f_{\sigma 4}^{(e)} \end{Bmatrix} = \iiint_{V^{(e)}} B^T \sigma^0 dV$$

donde

$$f_{\sigma i}^{(e)} = \iiint_{V^{(e)}} B^T \sigma^0 dV = \frac{1}{6} \begin{Bmatrix} b_i \sigma_x^0 + c_i \tau_{xy}^0 + d_i \tau_{xz}^0 \\ b_i \sigma_y^0 + c_i \tau_{xy}^0 + d_i \tau_{yz}^0 \\ b_i \sigma_z^0 + c_i \tau_{xz}^0 + d_i \tau_{yz}^0 \end{Bmatrix}$$

La aproximación lineal del elemento tetraédrico de cuatro nodos le confiere una precisión limitada ya que sólo puede modelar exactamente un campo de tensiones o deformaciones uniforme. Esto implica que en zonas donde se prevean gradientes de tensiones elevados será necesario utilizar mallas más tupidas.

Otra peculiaridad inherente al elemento tetraédrico es la dificultad de la discretización de un sólido en una malla de tetraedros, lo que puede ser un grave problema para el análisis de sólidos con geometría irregular.

A.4 Teoría de placas de Kirchhoff. [42]

A.4.1 Estado de placa.

Se define como placa al sólido paralelepípedo en el que una de sus dimensiones (el espesor) es mucho más pequeña que las otras dos. La superficie plana equidistante de las caras de mayores dimensiones se denomina plano medio de la placa.

Se define como **estado de placa** al estado de cargas en el que sólo actúan como sollicitaciones externas fuerzas normales al plano medio y momentos cuyos ejes están contenidos en dicho plano, tal y como se puede observar en la figura 278.

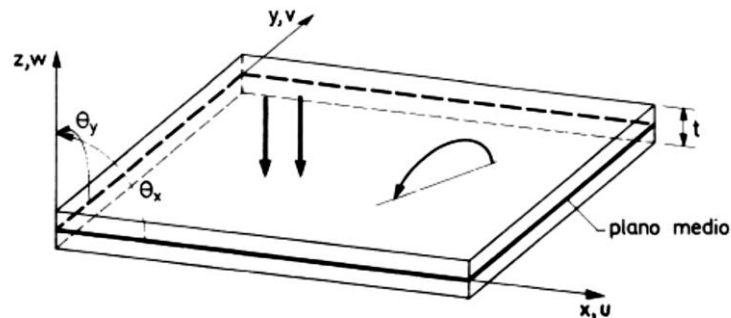


Figura 278. Definición geométrica de una placa y convenio de signos para desplazamientos y giros.

A.4.2 Hipótesis fundamentales.

Las hipótesis sobre las que se basa la teoría de placas de Kirchhoff son las siguientes:

1. En los puntos del plano medio

$$u = v = 0$$

Es decir, los puntos del plano medio sólo se mueven verticalmente.

2. Todos los puntos contenidos en una normal al plano medio tienen el mismo desplazamiento vertical.

3. La tensión normal σ_z es despreciable.
4. Los puntos sobre rectas normales al plano medio antes de la deformación permanecen sobre rectas también ortogonales a la deformada del plano medio después de la deformación.

Las hipótesis 1, 2 y 4 permiten definir el campo de desplazamientos a través del espesor de la placa. La tercera hipótesis afecta a la relación tensión-deformación, que puede modificarse adecuadamente como se verá en el apartado A.4.4.

A.4.3 Campo de desplazamientos.

De las hipótesis 1, 2 y 4 anteriores y de la figura 279 se deduce que:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= -z\theta_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= -z\theta_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w(x, y)
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1^a \text{ y } 4^a \text{ hipótesis}) \\ (2^a \text{ hipótesis}) \end{array}$$

donde w es el desplazamiento vertical de los puntos del plano medio y θ_x y θ_y son los ángulos que definen el giro de la normal (hipótesis 4) contenidos en los planos xz e yz , respectivamente.

El vector $u = (w, \theta_x, \theta_y)^T$ se denomina vector de movimientos (contiene los desplazamientos y los giros) de un punto del plano medio de la placa.

Por otro lado, de la hipótesis 4 y, también, de la figura 279 se deduce que:

$$\theta_x = \frac{dw}{dx} \quad y \quad \theta_y = \frac{dw}{dy}$$

Es decir, los giros del normal de un punto coinciden con la pendiente del plano medio en ese punto.

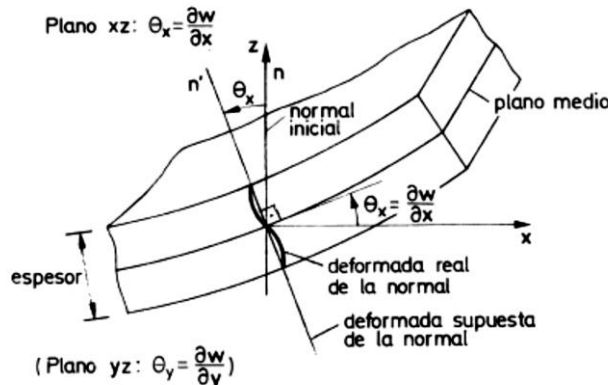


Figura 279. Deformación del plano medio de una placa delgada y giro de la normal.

Por consiguiente, el campo de desplazamientos de la placa se puede expresar en la forma:

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= -z \frac{dw(x, y)}{dx} \\v(x, y, z) &= -z \frac{dw(x, y)}{dy} \\w(x, y, z) &= w(x, y)\end{aligned}$$

y el vector de movimientos antes referido queda expresado como:

$$u = \left(w, \frac{dw}{dx}, \frac{dw}{dy} \right)^T$$

La mayor parte de las teorías de placas se basan en la hipótesis de deformación recta de normal. En realidad esto no es más que una aproximación, pues la sección transversal se distorsiona con la deformación, tal y como se muestra en la figura 279 y el ángulo (θ_x o θ_y) dependen de la altura sobre el plano medio. La hipótesis de deformación recta de la normal equivale a suponer un giro medio uniforme para cada normal, lo que evidentemente simplifica el problema.

Por otro lado, se debe tener en cuenta que la hipótesis de ortogonalidad de la normal sólo se cumple para placas de pequeño espesor (relación espesor/ancho medio, $t/l \leq 0,05$). Para placas de moderado y gran espesor ($t/l \geq 0,10$) la distorsión de la sección aumenta con la deformación de manera que se pierde la ortogonalidad entre la normal media y el plano medio. En estos casos, la teoría de Reissner-Mindlin, que se verá en el apartado A.5, representa una mejor aproximación de la deformación real de la placa. No obstante, si dicha distorsión es excesivamente grande, se debe acudir a la teoría de la elasticidad tridimensional (apartado A.3)

A.4.4 Campo de deformaciones, tensiones y esfuerzos.

De las ecuaciones del campo de desplazamientos y de la elasticidad tridimensional, vista anteriormente, se deduce:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\delta u}{\delta x} = -z \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\delta v}{\delta y} = -z \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \quad ; \quad \varepsilon_z \approx 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} = -2z \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x} = 0 \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y} = 0\end{aligned}$$

Se concluye, a partir de las expresiones anteriores, que la cuarta hipótesis de Kirchhoff conduce a que las deformaciones transversales γ_{xz} y γ_{yz} son nulas. Por consiguiente, las tensiones tangenciales transversales no contribuyen a la deformación de la placa. Esto no significa que el valor de dichas tensiones sea insignificante, de hecho puede calcularse posteriormente aplicando el equilibrio entre flectores y cortantes. Es también interesante destacar que la hipótesis 3 conduce a que el trabajo de deformación $\sigma_z \varepsilon_z$ es nulo, por lo que puede prescindirse de la deformación ε_z en el análisis, pudiendo obtenerse posteriormente en función de ε_x y ε_y .

El vector $\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \\ -z \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \\ -2z \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \end{Bmatrix}$ (A.8) es el vector de deformaciones independientes

de la placa y tiene asociado el correspondiente vector de tensiones $\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]$. En la figura 280 se indica el convenio de signos.

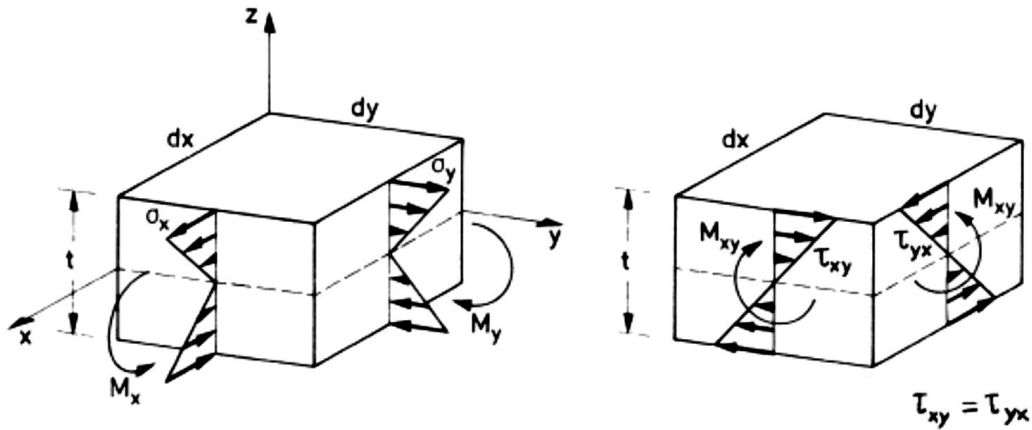


Figura 280. Convenio de signos para tensiones y momentos en una placa.

Partiendo de la relación general entre tensiones y deformaciones de la elasticidad tridimensional y considerando que σ_z, γ_{xz} y γ_{yz} son nulas, puede encontrarse una nueva expresión entre las tensiones y deformaciones no nulas. Así, para una placa de material ortótropo con direcciones principales de ortotropía x, y se obtiene:

$$\sigma = \frac{1}{1 - \nu_{yx}\nu_{xy}} \begin{bmatrix} E_x & \nu_{xy}E_x & 0 \\ \nu_{yx}E_x & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{yx}\nu_{xy})G_{xy} \end{bmatrix} \varepsilon = D\varepsilon \quad (A.9)$$

Para material isotrópico, la matriz D para tensión plana sería:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (A.10)$$

Por otro lado, el vector de esfuerzos quedaría definido como:

$$\widehat{\sigma}_f = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma dz \quad (A.11)$$

donde M_x y M_y son los momentos flectores de las tensiones σ_x y σ_y con respecto al plano medio, respectivamente, y M_{xy} es el momento torsor producido por la tensión tangencial τ_{xy} .

Sustituyendo en (A.11) las relaciones (A.10) y (A.8), se encuentra:

$$\widehat{\sigma}_f = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z D \varepsilon dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 D \hat{\varepsilon}_f dz = \widehat{D}_f \hat{\varepsilon}_f \quad (A.12)$$

donde

$$\widehat{D}_f = \frac{t^3}{12} D$$

es la matriz constitutiva de flexión y

$$\hat{\varepsilon}_f = \left[-\frac{\delta^2 w}{\delta x^2}, \quad -\frac{\delta^2 w}{\delta y^2}, \quad -2 \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \right]^T \quad (A.13)$$

es el vector de deformaciones generalizadas de flexión (o vector de curvaturas). Comparando (A.8) y (A.13) se observa que:

$$\varepsilon = z \hat{\varepsilon}_f$$

A.4.5 Expresión del principio de los trabajos virtuales.

Para el caso de carga repartida de intensidad q y fuerzas puntuales W_i (actuando ambas en dirección del eje z), el PTV se escribe:

$$\iiint_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \iint_A \delta w q dA + \sum_i \delta w_i W_i$$

Las características del problema de flexión de placas permiten simplificar la integral de volumen del trabajo virtual en otra sobre el plano medio de la placa en función de los esfuerzos y las deformaciones generalizadas. Así, haciendo uso de (A.8), (A.9) y (A.12), se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta U &= \iiint_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \iiint_V (z \delta \varepsilon_f^T) \sigma dV = \\ &= \iint_A \delta \varepsilon_f^T \left[\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma dz \right] dA = \iint_A \delta \varepsilon_f^T \widehat{\sigma}_f dA \end{aligned} \quad (A.14)$$

De este modo, operándose con los esfuerzos y las deformaciones generalizadas, el estudio de un problema de flexión de placas adquiere un carácter bidimensional, ya que todas las integrales y variables del problema son función únicamente de las coordenadas del plano medio de la placa.

Es interesante desarrollar (A.14) como:

$$\delta U = - \iint_A \left[\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} M_x + \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} M_y + 2 \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} M_{xy} \right] dA$$

pues en dicha expresión se aprecia claramente que el trabajo de deformación virtual de la placa puede obtenerse a partir de las contribuciones del trabajo que realizan cada uno de los momentos sobre las curvaturas correspondientes.

A.4.6 Ecuaciones de equilibrio de la placa.

En la teoría de Kirchhoff es particularmente interesante encontrar las ecuaciones de equilibrio en función de los esfuerzos. Dichas ecuaciones permiten calcular los esfuerzos cortantes una vez conocidos los movimientos. Asimismo, la ecuación diferencial de equilibrio de la placa en función de la flecha ha sido extensamente utilizada para encontrar soluciones analíticas a problemas de placas delgadas de geometría sencilla.

Estableciendo el equilibrio de esfuerzos en un elemento diferencial de placa (figura 281), se deducen fácilmente las ecuaciones siguientes:

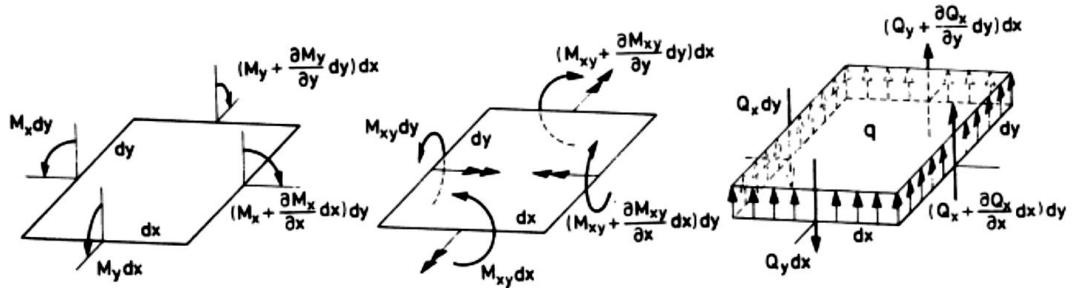


Figura 281. Esfuerzos en un elemento diferencial de placa.

- Equilibrio de fuerzas verticales

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow \left(\frac{\delta Q_x}{\delta x} dx \right) dy + \left(\frac{\delta Q_y}{\delta y} dy \right) dx + q dx dy = 0$$

dividiendo por $dx dy$

$$\frac{\delta Q_x}{\delta x} + \frac{\delta Q_y}{\delta y} + q = 0 \quad (A.15)$$

- Equilibrio de momentos

$$\begin{aligned} \sum M_x = 0 \Rightarrow & \left(\frac{\delta M_y}{\delta y} dy \right) dx + \left(\frac{\delta M_{xy}}{\delta x} dx \right) dy - \\ & - \left(Q_y + \frac{\delta Q_y}{\delta y} dy \right) dx dy - \left(\frac{\delta Q_x}{\delta x} dx \right) dy \frac{dy}{2} + q dx dy \frac{dy}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_y = 0 \Rightarrow & \left(\frac{\delta M_x}{\delta x} dx \right) dy + \left(\frac{\delta M_{xy}}{\delta y} dy \right) dx - \\ & - \left(Q_x + \frac{\delta Q_x}{\delta x} dx \right) dy - \left(\frac{\delta Q_y}{\delta y} dy \right) dx \frac{dx}{2} + q dx dy \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned}$$

y despreciando términos de segundo orden

$$\frac{\delta M_y}{\delta y} + \frac{\delta M_{xy}}{\delta x} - Q_y = 0 \quad (A.16)$$

$$\frac{\delta M_x}{\delta x} + \frac{\delta M_{xy}}{\delta y} - Q_x = 0 \quad (A.17)$$

Diferenciando (A.16) y (A.17) con respecto a y y x , respectivamente, y sustituyendo en (A.15) se obtiene:

$$\frac{\delta^2 M_x}{\delta x^2} + 2 \frac{\delta^2 M_{xy}}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 M_y}{\delta y^2} = -q$$

Finalmente, haciendo uso de (A.12) pueden sustituirse los momentos en función de la flecha, obteniéndose, para un material isótropo:

$$\frac{\delta^4 w}{\delta x^4} + 2 \frac{\delta^4 w}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 w}{\delta y^4} = \frac{q}{D}$$

o $\nabla^4 w = \frac{q}{D}$ (A.18) con $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ que es una ecuación diferencial de cuarto orden que relaciona la flecha con la carga repartida y las propiedades del material. Dicha ecuación con sus correspondientes condiciones de contorno, es el punto de partida para resolver analíticamente problemas de placas isótropas.

Una vez calculada la flecha por integración de (A.18), los momentos flectores en cada punto se obtienen a partir de (A.12). Por otra parte, sustituyendo (A.12) en (A.16) y (A.17) se deducen las expresiones de los esfuerzos cortantes:

$$Q_x = -D \left(\frac{\delta^3 w}{\delta x^3} + \frac{\delta^3 w}{\delta x \delta y^2} \right)$$

$$Q_y = -D \left(\frac{\delta^3 w}{\delta y^3} + \frac{\delta^3 w}{\delta y \delta x^2} \right)$$

A.4.7 Formulación de elementos finitos.

La forma intuitiva más sencilla de satisfacer los requisitos de continuidad C_1 para la flecha es tomar, de forma similar a como se hacía con elementos de vigas de Euler-Bernoulli, la flecha y sus dos giros como variables nodales.

Se obtienen tres variables por nodo $w_i, \left(\frac{\delta w}{\delta x}\right)_i, \left(\frac{\delta w}{\delta y}\right)_i$ y el número total de variables de un elemento de n nodos será $3n$. Este número determina el número de términos del polinomio que aproxima w dentro de cada elemento.

De este modo, en general:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \dots \quad (\text{hasta } 3n \text{ términos})$$

El cálculo de las α_i se efectúa imponiendo las condiciones en los nodos:

$$\left. \begin{aligned} w_i &= (w)_i \\ \theta_{x_i} &= \left(\frac{\delta w}{\delta x} \right)_i \quad ; \quad \theta_{y_i} = \left(\frac{\delta w}{\delta y} \right)_i \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, n$$

lo que proporciona $3n$ ecuaciones.

El problema fundamental reside en la selección adecuada de los términos del polinomio, ya que en general suele haber varias alternativas. Cada una de ellas define un elemento distinto, como los triangulares y cuadrangulares ya vistos en el apartado 5.5.3.

A.5 Teoría de placas de Reissner-Mindlin.[42]

A.5.1 Hipótesis fundamentales.

La teoría de placas de Reissner-Mindlin se obtiene a partir de la teoría de Kirchhoff relajando la hipótesis de ortogonalidad de la normal durante la deformación de la placa. De este modo, se mantienen las tres primeras hipótesis de la teoría de Kirchhoff y, por el contrario, la hipótesis cuarta sobre ortogonalidad de la normal se modifica como sigue:

“4. Los puntos que antes de la deformación estaban sobre la normal al plano medio de la placa, permanecen, al deformarse sobre una misma recta, sin que ésta tenga que ser necesariamente ortogonal a la deformada del plano medio.”

Esta hipótesis es análoga a la establecido para el giro de la sección en la teoría de vigas de Timoshenko.

A.5.2 Campo de desplazamientos.

De las hipótesis 1, 2 y 4 se deduce que:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= -z\theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned}$$

donde θ_x y θ_y son los ángulos que definen el giro de la normal. Puede comprobarse que el campo de desplazamientos anterior coincide con el expresado para la teoría de Kirchhoff, por lo que el vector de movimientos, también de igual forma, se define:

$$u = (w, \theta_x, \theta_y)^T$$

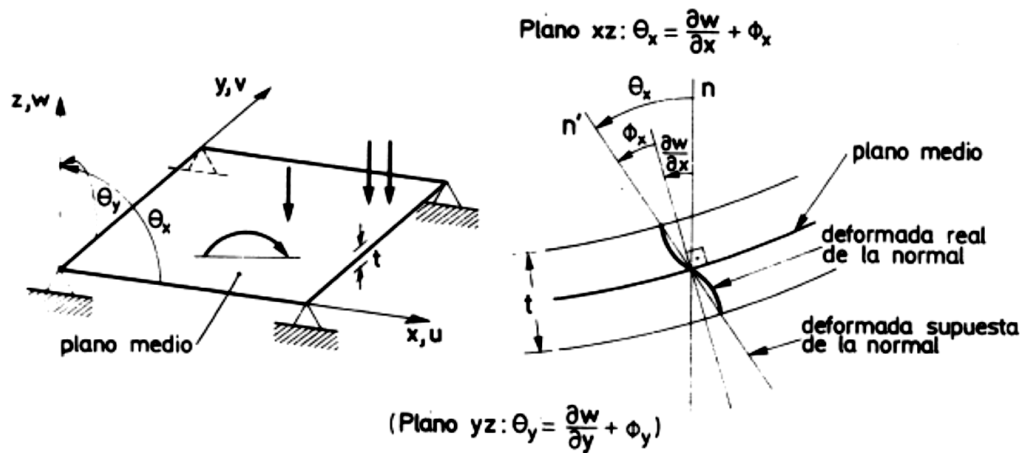


Figura 282. Teoría de placas de Reissner-Mindlin. Convenio de signos para los movimientos y giro de la normal.

De la hipótesis 4 sobre el giro de la normal se tiene (ver figura 282)

$$\theta_x = \frac{dw}{dx} + \phi_x$$

e igualmente en el plano yz

$$\theta_y = \frac{dw}{dy} + \phi_y$$

Es decir, los giros de la normal en un punto se componen de dos términos: los primeros, $\frac{dw}{dx}$ y $\frac{dw}{dy}$, son debidos al cambio de pendiente del plano medio. Los segundos, ϕ_x y ϕ_y , se deben al giro adicional de la normal al no permanecer necesariamente ortogonal a la deformada del plano medio. De este modo, los giros de la normal no pueden obtenerse únicamente en función de la pendiente del plano medio, como ocurría con la teoría de Kirchhoff. Esto permite considerar dichos giros como variables independientes, siendo ésta la diferencia sustancial entre ambas teorías de placas.

También es de destacar que la hipótesis 4 establece que las normales al plano medio se mantienen rectas después del giro, lo que implica que la distribución de tensiones tangenciales es constante sobre el espesor. En realidad, esto no es más que una aproximación pues, las normales inicialmente rectas se distorsionan durante la deformación, siendo esta distorsión más importante cuanto mayor sea el espesor de la placa. Así pues, los giros deben interpretarse de nuevo como valores medios de la deformada real de la normal.

A.5.3 Campo de deformaciones y tensiones.

Para obtener el campo de deformaciones se parte de la definición general de las deformaciones en tres dimensiones:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\delta u}{\delta x} ; \varepsilon_y = \frac{\delta v}{\delta y} ; \varepsilon_z = \frac{\delta w}{\delta z} \\ \tau_{xy} &= \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} ; \tau_{xz} = \frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x} ; \tau_{yz} = \frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y}\end{aligned}$$

Sustituyendo en estas ecuaciones el campo de movimientos, se obtiene:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\delta u}{\delta x} = -z \frac{\partial \theta_x}{\delta x} ; \varepsilon_y = \frac{\delta v}{\delta y} = -z \frac{\partial \theta_y}{\delta y} ; \varepsilon_z = \frac{\delta w}{\delta z} = 0 \\ \tau_{xy} &= \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} = -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\delta y} + \frac{\partial \theta_y}{\delta x} \right) \\ \tau_{xz} &= \frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x} = -\theta_x + \frac{\delta w}{\delta x} = -\phi_x \\ \tau_{yz} &= \frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y} = -\theta_y + \frac{\delta w}{\delta y} = -\phi_y\end{aligned}$$

Es apreciable que la hipótesis de no ortogonalidad de la normal se traduce en que las deformaciones transversales τ_{xz} y τ_{yz} no son nulas, siendo su valor absoluto el de los giros ϕ_x y ϕ_y . Asimismo, dichas deformaciones, y por consiguiente sus respectivas tensiones, son independientes de la coordenada z .

Puesto que por la hipótesis 3, la tensión normal σ_z es nula, se puede definir el vector de tensiones no nulas por:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \dots \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_f \\ \dots \\ \sigma_c \end{Bmatrix}$$

donde σ_f y σ_c representan los vectores de tensiones debidas a efectos de flexión y cortante transversal, respectivamente. El criterio de signos para las "tensiones de flexión" σ_x , σ_y y τ_{xy} coincide con el de la figura 158. Por otra parte, los signos positivos para las tensiones de cortante transversal τ_{xz} y τ_{yz} se muestran en la figura 283.

Por analogía, puede definirse el vector de deformaciones asociado al de tensiones:

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \dots \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ \dots \\ -\theta_x + \frac{\delta w}{\delta x} \\ -\theta_y + \frac{\delta w}{\delta y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_f \\ \dots \\ \epsilon_c \end{Bmatrix}$$

donde ϵ_f y ϵ_c son, respectivamente, los valores de deformaciones de flexión y de cortante transversal.

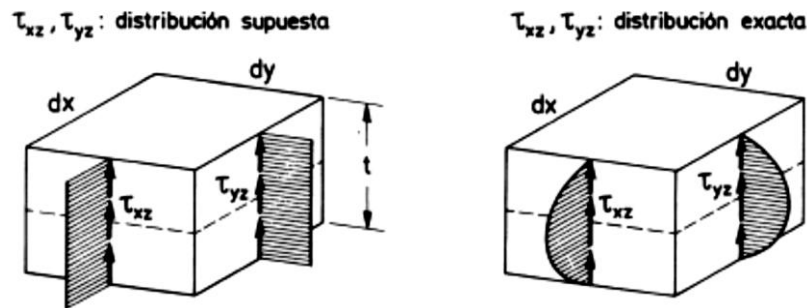


Figura 283. Convenio de signos para las tensiones τ_{xz} y τ_{yz} .

A.5.4 Relación tensión-deformación.

Partiendo de la ecuación constitutiva de la elasticidad tridimensional y haciendo uso de que σ_z es nula, se puede encontrar la siguiente relación entre las tensiones no nulas y sus deformaciones asociadas.

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_f \\ \sigma_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_f & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & D'_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_f \\ \dots \\ \epsilon_c \end{Bmatrix} = D \epsilon \quad (A.19)$$

siendo D_f y D'_c las matrices constitutivas de flexión y cortante, respectivamente, que para elasticidad ortótropa se escriben como:

$$D_f = \frac{1}{1 - \nu_{yx}\nu_{xy}} \begin{bmatrix} E_x & \nu_{xy}E_x & 0 \\ \nu_{yx}E_x & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{yx}\nu_{xy})G_{xy} \end{bmatrix}$$

$$D'_c = \begin{bmatrix} G_{xz} & 0 \\ 0 & G_{yz} \end{bmatrix}$$

Para un material isótropo:

$$E_x = E_y = E \quad ; \quad \nu_{yx} = \nu_{xy} = \nu$$

$$G_{xy} = G_{xz} = G_{yz} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Debido al campo de desplazamientos supuesto, la distribución de deformaciones $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ y τ_{xy} es lineal en z y, por consiguiente, también lo es el de las correspondientes tensiones σ_x, σ_y y τ_{xy} . Por otra parte, la distribución de deformaciones γ_{xz} y γ_{yz} es constante a lo largo del espesor, y lo mismo sucede con las correspondientes tensiones τ_{xz} y τ_{yz} .

No obstante, de acuerdo con la teoría de la elasticidad, la distribución "exacta" de las tensiones tangenciales transversales no es constante a través del espesor. Generalmente, esta distribución tiene forma polinómica con valores nulos en los planos inferior y superior de la placa. Por ello, se le aplica a las tensiones tangenciales transversales un coeficiente de manera que el trabajo de deformación de las mismas coincida con el realizado por las tensiones transversales exactas. De esta forma se puede afirmar que el trabajo de deformación global de la placa coincide con el exacto, aunque localmente las tensiones tangenciales no tengan la distribución correcta. Por ello, en la práctica, el vector σ_c se escribe como:

$$\sigma_c = \begin{bmatrix} \alpha_1 G_{xz} & 0 \\ 0 & \alpha_2 G_{yz} \end{bmatrix} \varepsilon_c = D_c \varepsilon_c \quad (A.20)$$

donde α_1 y α_2 son los coeficientes de distorsión transversal cuyo valor habitual en placas de espesor constante y material homogéneo es $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{5}{6}$.

A.5.5 Esfuerzos y deformaciones generalizadas.

Se define el vector de esfuerzos en un punto del plano medio como:

$$\hat{\sigma} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_f \\ \hat{\sigma}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} z\sigma_x \\ z\sigma_y \\ z\tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} z\sigma_f \\ \dots \\ \sigma_c \end{Bmatrix} dz \quad (A.21)$$

donde $\widehat{\sigma}_f$ y $\widehat{\sigma}_c$ son los vectores de momentos flectores y esfuerzos cortantes, respectivamente. En la figura 284 se muestra el convenio de signos para los esfuerzos:

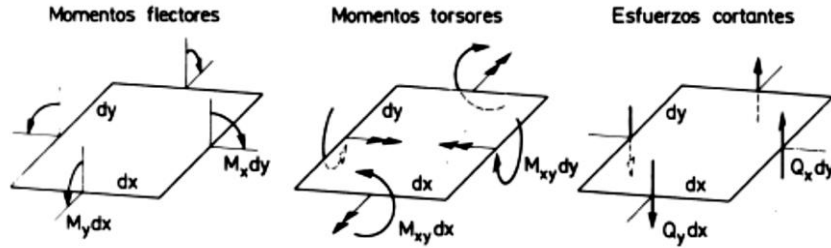


Figura 284. Convenio de signos para los esfuerzos en una placa.

La ecuación (A.21) se puede modificar haciendo uso de las ecuaciones (A.19) y (A.20), como:

$$\widehat{\sigma} = \begin{Bmatrix} \widehat{\sigma}_f \\ \dots \\ \widehat{\sigma}_c \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} z D_f \varepsilon_f \\ \dots \\ D_c \varepsilon_c \end{Bmatrix} dz$$

y operando

$$\begin{aligned}
 \widehat{\sigma} &= \begin{Bmatrix} \widehat{\sigma}_f \\ \dots \\ \widehat{\sigma}_c \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} z D_f \varepsilon_f \\ \dots \\ D_c \varepsilon_c \end{Bmatrix} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left\{ \begin{array}{c} z D_f \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \\ \dots \\ D_c \begin{Bmatrix} -\theta_x + \frac{\delta w}{\delta x} \\ -\theta_y + \frac{\delta w}{\delta y} \end{Bmatrix} \end{array} \right\} dz = \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} \left(\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 dz \right) D_f \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \\ \dots \\ \left(\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} dz \right) D_c \begin{Bmatrix} -\theta_x + \frac{\delta w}{\delta x} \\ -\theta_y + \frac{\delta w}{\delta y} \end{Bmatrix} \end{array} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{t^3}{12} D_f \widehat{\varepsilon}_f \\ \dots \\ t D_c \widehat{\varepsilon}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \widehat{D}_f \widehat{\varepsilon}_f \\ \dots \\ \widehat{D}_c \widehat{\varepsilon}_c \end{Bmatrix} \quad (A.22)
 \end{aligned}$$

donde $\widehat{D}_f = \frac{t^3}{12} D_f$ y $\widehat{D}_c = t D_c$ son las matrices constitutivas generalizadas de flexión y cortante, respectivamente. Por otra parte, la relación entre los vectores de deformación y los de deformación generalizada sería:

$$\varepsilon_f = z \widehat{\varepsilon}_f \quad ; \quad \varepsilon_c = \widehat{\varepsilon}_c$$

Con ello, la ecuación (A.22), se puede reescribir como:

$$\widehat{\sigma} = \begin{Bmatrix} \widehat{\sigma}_f \\ \widehat{\sigma}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{D}_f & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \widehat{D}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{\varepsilon}_f \\ \dots \\ \widehat{\varepsilon}_c \end{Bmatrix} = \widehat{D} \widehat{\varepsilon}$$

A.5.6 Principio de los trabajos virtuales.

Para mayor simplicidad, se considerará la expresión de los trabajos virtuales en una placa sobre la cual actúa únicamente una cara uniformemente distribuida q y fuerzas puntuales W_i (actuando ambas en dirección del eje z). La igualdad entre el trabajo de deformación interno virtual y el de las fuerzas exteriores se escribe de la forma clásica

$$\iiint_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \iint_A \delta w q dA + \sum_i \delta w_i W_i$$

Se expresa ahora el trabajo de deformación virtual en función de los esfuerzos y las deformaciones generalizadas virtuales:

$$\begin{aligned} \iiint_V \delta \varepsilon^T \sigma dV &= \iiint_V \delta [z \widehat{\varepsilon}_f^T, \widehat{\varepsilon}_c^T] \begin{Bmatrix} \widehat{\sigma}_f \\ \widehat{\sigma}_c \end{Bmatrix} dV = \iiint_V \delta \widehat{\varepsilon}^T \begin{Bmatrix} z \sigma_f \\ \sigma_c \end{Bmatrix} dV = \\ &= \iint_A \delta \widehat{\varepsilon}^T \left[\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} z \sigma_f \\ \sigma_c \end{Bmatrix} dz \right] dA = \iint_A \delta \varepsilon^T \widehat{\sigma} dA \end{aligned}$$

Por consiguiente, operando con esfuerzos y deformaciones generalizadas el problema de flexión de placas adquiere un carácter bidimensional, ya que todas las integrales que aparecen en el PTV son en dos dimensiones.

A.5.7 Formulación de elementos finitos.

A.5.7.1 Discretización del campo de movimientos.

El plano medio de la placa se discretiza en una malla de elementos isoparamétricos de clase C_0 (figura 285). Se supone que cada elemento tiene n nodos. Puesto que la flecha y el giro son variables independientes, puede efectuarse la interpolación del vector de movimientos u . Así se tiene:

$$u = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} N_i w_i \\ N_i \theta_{x_i} \\ N_i \theta_{y_i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \vdots & \dots & \vdots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \vdots & \dots & \vdots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \vdots & \dots & \vdots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ \vdots \\ w_n \\ \theta_{x_n} \\ \theta_{y_n} \end{Bmatrix} =$$

$$= [N_1, N_2, \dots, N_n] \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = N a^{(e)}$$

donde

$$N = [N_1, N_2, \dots, N_n] \quad , \quad a^{(e)} = \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ \vdots \\ a_n^{(e)} \end{Bmatrix} \quad y$$

$$N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad , \quad a_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix}$$

son las matrices de forma y el vector de movimientos del elemento y de un nodo i , respectivamente.

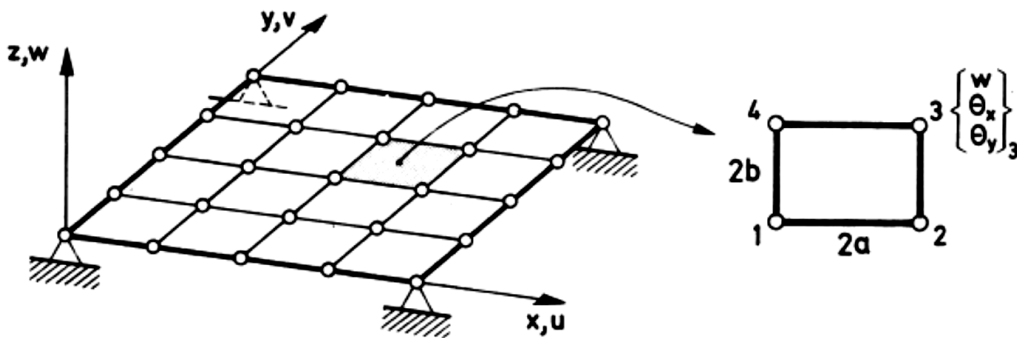


Figura 285. Discretización de una placa con elementos placa de Reissner-Mindlin rectangulares de cuatro nodos.

A.5.7.2 Discretización del campo de deformaciones generalizadas.

El vector de deformaciones generalizadas puede expresarse en la forma:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_f \\ \vdots \\ \hat{\varepsilon}_c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial \theta_x}{\delta x} \\ -\frac{\partial \theta_y}{\delta y} \\ -\left(\frac{\partial \theta_x}{\delta y} + \frac{\partial \theta_y}{\delta x}\right) \\ \vdots \\ -\theta_x + \frac{\delta w}{\delta x} \\ -\theta_y + \frac{\delta w}{\delta y} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} -\frac{\partial N_i}{\delta x} \theta_{xi} \\ -\frac{\partial N_i}{\delta y} \theta_{yi} \\ -\left(\frac{\partial N_i}{\delta y} \theta_{xi} + \frac{\partial N_i}{\delta x} \theta_{yi}\right) \\ \vdots \\ -N_i \theta_{xi} + \frac{\delta N_i}{\delta x} w_i \\ -N_i \theta_{yi} + \frac{\delta N_i}{\delta y} w_i \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} B_{fi} \\ B_{ci} \end{Bmatrix} a_i^{(e)} = [B_1, \dots, B_n] \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ \vdots \\ a_n^{(e)} \end{Bmatrix} = B a^{(e)} \end{aligned}$$

donde B y B_i son la matriz de deformación generalizada del elemento y del nodo i , respectivamente. De la ecuación anterior se puede deducir:

$$B_i = \begin{Bmatrix} B_{fi} \\ \vdots \\ B_{ci} \end{Bmatrix}$$

con

$$B_{fi} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\delta x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\delta y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\delta y} & -\frac{\partial N_i}{\delta x} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B_{ci} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\delta x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\delta y} & 0 & -N_i \end{bmatrix}$$

donde B_{fi} y B_{ci} son las matrices de deformaciones generalizadas de flexión y de cortante transversal asociadas al nodo i , respectivamente.

A.5.7.3 Obtención de la matriz de rigidez del elemento.

Aplicando el PTV al dominio discretizado de un elemento, se tiene:

$$\iint_{A^{(e)}} \delta \varepsilon^T \hat{\sigma} dA - \iint_{A^{(e)}} \delta w q dA = \sum_i \delta w_i W_i$$

Operando se obtiene la clásica expresión:

$$\left[\iint_{A^{(e)}} B^T \hat{D} B dA \right] a^{(e)} - \iint_{A^{(e)}} N t dA = q^{(e)}$$

o

$$K^{(e)} a^{(e)} - f^{(e)} = q^{(e)}$$

donde

$$K^{(e)}_{ij} = \iint_{A^{(e)}} B^T_i \hat{D} B_j dA$$

$$f^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} N_i [q, 0, 0]^T dA$$

$$q^{(e)} = [W_i, 0, 0]^T$$

son la submatriz de rigidez que conecta los nodos ij , el vector de fuerzas nodales equivalentes del nodo i debido a una carga repartida vertical, y el vector de fuerzas nodales de equilibrio del nodo i , respectivamente.

Se puede transformar la expresión de la matriz de rigidez del elemento en la forma siguiente:

$$K^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} [B_f^T, B_c^T] \hat{D} \begin{Bmatrix} B_f \\ B_c \end{Bmatrix} dA = \iint_{A^{(e)}} [B_f^T \hat{D} B_f + B_c^T \hat{D} B_c] dA = K^{(e)}_f + K^{(e)}_c$$

donde

$$K^{(e)}_f = \iint_{A^{(e)}} B_f^T \hat{D} B_f dA$$

$$K^{(e)}_c = \iint_{A^{(e)}} B_c^T \hat{D} B_c dA$$

son las matrices de rigidez que contienen términos de flexión y cortante, respectivamente. Obtener la matriz de rigidez del elemento como suma de las dos matrices anteriores es más económico que calcular directamente la matriz total.

A.5.7.4 Otros vectores de fuerzas nodales equivalentes.

En el apartado anterior se obtuvo el vector de fuerzas nodales equivalentes para el caso de una carga repartida vertical sobre el elemento. La expresión de dicho vector para otros casos de carga es muy sencilla. Así, si también actúan momentos distribuidos, la expresión de $f^{(e)}_i$ es

$$f^{(e)}_i = \iint_{A^{(e)}} N_i \begin{Bmatrix} q \\ m_x \\ m_y \end{Bmatrix} dA$$

donde m_x y m_y son los momentos repartidos correspondientes a los giros θ_x y θ_y , respectivamente.

El caso del peso propio es similar al de la fuerza repartida vertical. Así pues, si ρ es la densidad del material de la placa, se tiene (suponiendo que el peso actúa en dirección contraria al eje z)

$$f^{(e)}_i = \iint_{A^{(e)}} N_i \rho t \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} dA$$

Finalmente, el vector de fuerzas puntuales de un nodo puede escribirse de forma genérica como:

$$q^{(e)} = \begin{Bmatrix} W_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \end{Bmatrix}$$

donde W_i , M_{xi} y M_{yi} son, respectivamente, la fuerza puntual vertical y los momentos según θ_x y θ_y , actuando en el nodo i .

A.6 Análisis modal: Método de Lanczos.

A.6.1 Conceptos previos. El método de Arnoldi.

El programa informático de elementos finitos utilizado durante el desarrollo del presente proyecto (ANSYS 10) ofrece varios métodos para la obtención de autovalores y autovectores en un sistema de n grados de libertad con objeto de hallar las frecuencias y modos propios de vibración. El método utilizado fue el de Block Lanczos. Éste está disponible para problemas de gran tamaño de autovalores con simetría.

El algoritmo de pivote por bloques de Lanczos (Block Lanczos) es la base teórica de este extractor de autovalores. Este algoritmo es una variación del algoritmo de Lanczos clásico, que se explicará en el apartado A.6.2 debido a que se opera usando un bloque de vectores, en lugar de un solo vector.

El método de Lanczos es una simplificación del método de Arnoldi. Éste último se basa en reducir una matriz densa a una matriz de Hessemberg cuyos autovalores (obtenidos en un número de pasos menor que n) proporcionan una aproximación exacta de algunos de los autovalores de la matriz original, a la vez genera un sistema de vectores ortonormados. [43]

ALGORITMO DE ARNOLDI

Elegir un vector $v_1/\|v_1\| = 1$
 Desde $j = 1, \dots, k$ hacer
 Desde $i = 1, \dots, j$ hacer
 $\{H\}_{ij} = \langle Av_j, v_i \rangle;$
 $w_j = Av_j - \{H\}_{ij}v_i;$
 Fin
 $\{H\}_{j+1,j} = \|w_j\|$. Si $\{H\}_{j+1,j} = 0$ parar
 $v_{j+1} = \frac{1}{\{H\}_{j+1,j}} w_j;$
 Fin

Los vectores v_1, v_2, \dots, v_k obtenidos en el algoritmo de Arnoldi forman una base del subespacio de Krylov,

$$K_k(A; v_1) = C.L. \{v_1, Av_1, A^2v_1, \dots, A^{k-1}v_1\}$$

Estos vectores $v_j (j = 1, \dots, k)$ son ortonormados por construcción. Cada vector del subespacio $K_k(A; v_1)$ es de la forma $q_{j-1}(A)v_1$, donde q_{j-1} es un polinomio de grado $j - 1$. Asumiendo que el resultado es válido para todo entero $i \leq j$ y considerando v_{j+1} , entonces,

$$h_{j+1,j}v_{j+1} = Av_j - \sum_{i=1}^j h_{ij}v_i = Aq_{j-1}(A)v_1 - \sum_{i=1}^j h_{ij}q_{j-1}(A)v_1$$

Por tanto v_{j+1} puede ser expresado como $q_j(A)v_1$, donde q_j es de grado j . Llamando V_k a la matriz $n \times k$ cuyas columnas son los vectores v_j con $j = 1, \dots, k$; \bar{H}_k a la matriz $(k+1) \times k$ de Hessemberg, cuyas entradas no nulas h_{ij} son obtenidas en el algoritmo de Arnoldi, y H_k a la matriz obtenida eliminando la última fila de \bar{H}_k se puede comprobar que:

$$\begin{aligned}
 AV_k &= V_k H_k + w_k e_k^T = V_{k+1} \bar{H}_k \\
 H_k &= V_k^T AV_k
 \end{aligned}$$

A.6.2 Método de Lanczos. [43]

El método de Lanczos es una simplificación del método de Arnoldi para el caso de matrices simétricas, ya que los coeficientes h_{ij} generados por el algoritmo son tales que,

$$\begin{cases} h_{ij} = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq j-1 \\ h_{j,j+1} = h_{j+1,j}, \quad j = 1, 2, \dots, k \end{cases}$$

con lo que la matriz H_k obtenida del proceso de Arnoldi es tridiagonal y simétrica.

La solución estándar del método es:

$$\begin{cases} h_{ij} = \alpha_i \\ h_{j-1,j} = \beta_j \end{cases}$$

y denotando por T_k la matriz resultante del algoritmo de Lanczos,

$$\mathbf{T}_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \beta_{k-1} & \alpha_{k-1} & \beta_k \\ & & & & \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}$$

ALGORITMO DE LANCZOS

Elegir un vector $v_1/\|v_1\| = 1, \beta_1 \equiv 0, V_0 \equiv 0$

Desde $j = 1, \dots, k$ hacer

$$w_j = Av_j - \beta_j v_{j-1};$$

$$\alpha_j = \langle w_j, v_j \rangle;$$

$$w_j = Av_j - \alpha_j v_j;$$

$$\beta_{j+1} = \|w_j\|. \text{ Si } \beta_{j+1} = 0 \text{ parar}$$

$$v_{j+1} = \frac{1}{\beta_{j+1}} w_j;$$

Fin

A.6.3 Método de Lanczos para sistemas simétricos. [43]

La aplicación del método de Lanczos a los sistemas de ecuaciones se realiza de la siguiente forma:

Dada una aproximación inicial x_0 del sistema de matriz simétrica, definida positiva $Ax = b$, y obtenidos los vectores $v_i (i = 1, 2, \dots)$ del algoritmo de Lanczos, junto con la matriz tridiagonal T_k , la solución aproximada obtenida por un método de proyección ortogonal sobre K_k viene dada por,

$$\begin{aligned} x_k &= x_0 + V_k y_k \\ y_k &= T_k^{-1}(\beta e_1) \end{aligned}$$

ALGORITMO DE LANCZOS PARA SISTEMAS LINEALES

Aproximación inicial x_0 . $r_0 = b - Ax_0$, $\beta = \|r_0\|$, $v_1 = r_0/\beta$
Desde $j = 1, \dots, k$ hacer

$$\begin{aligned} w_j &= Av_j - \beta_j v_{j-1} \text{ (si } j = 1 \text{ poner } \beta_1 v_0 \equiv 0); \\ \alpha_j &= \langle w_j, v_j \rangle; \\ w_j &= Av_j - \alpha_j v_j; \\ \beta_{j+1} &= \|w_j\|; \\ v_{j+1} &= \frac{1}{\beta_{j+1}} w_j; \end{aligned}$$

Fin

Tras la aplicación del algoritmo se generan las matrices $T_k = \text{tridiag}(\beta_i, \alpha_i, \beta_{i+1})$ y $V_k = [v_1, v_2, \dots, v_k]$, se resuelve $T_k y_k = \beta e_1$ y se calcula $x_k = x_0 + V_k y_k$, donde el vector residuo de la solución aproximada x_k es tal que,

$$b - Ax_k = -\beta_{k+1} e_k^T y_k v_{k+1}$$

Anexo B

Deformadas de los modos propios de vibración del eje analizado en el presente proyecto.

En el presente anexo, se muestran, desde la figura 286 a la figura 305, las imágenes de las deformadas que se producirían si se excitase el eje ferroviario que ha sido objeto de estudio a lo largo del proyecto con cargas de frecuencias correspondientes a las propias de vibración calculadas en el capítulo 8 y resumidas desde la tabla 7 a la 11 del mismo.

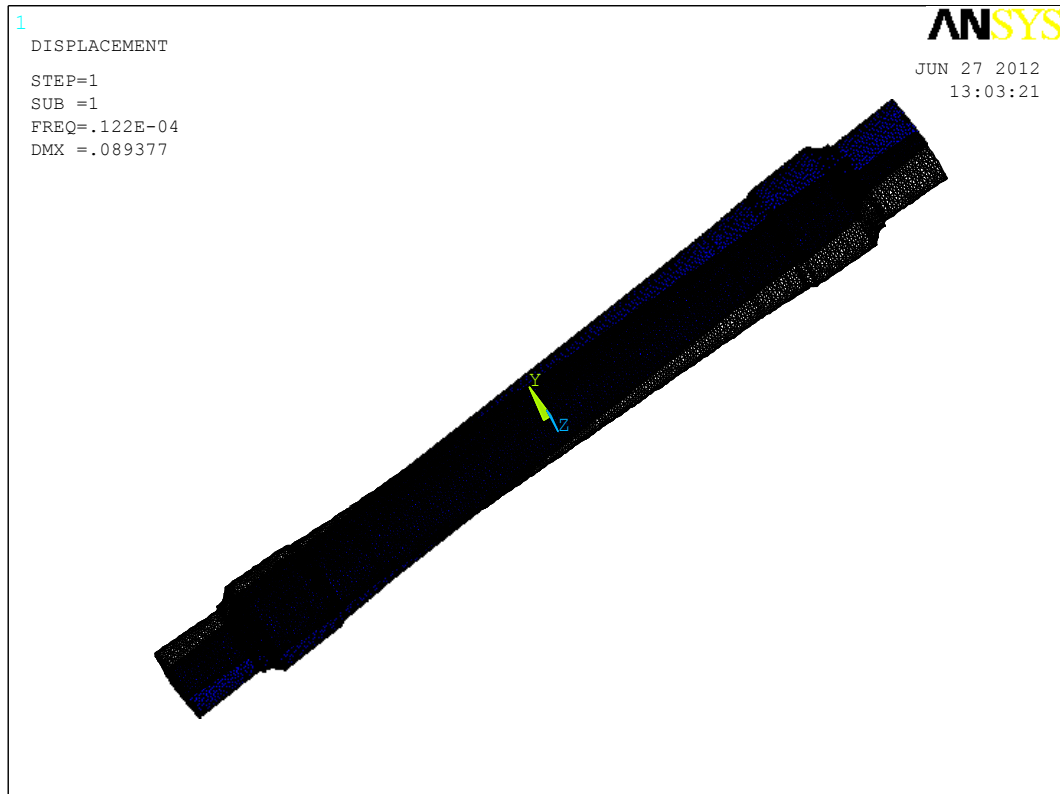


Figura 286. Modo propio de vibración número 1, según tabla 7 (capítulo 8).

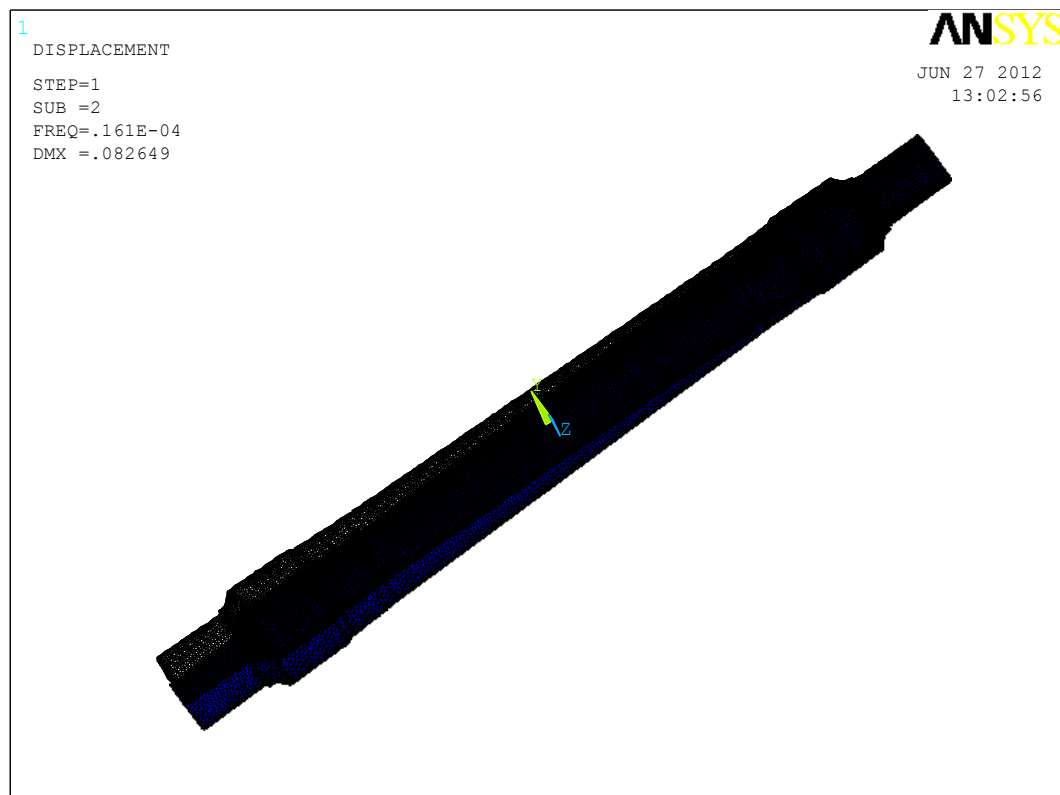


Figura 287. Modo propio de vibración número 2, según tabla 7 (capítulo 8).

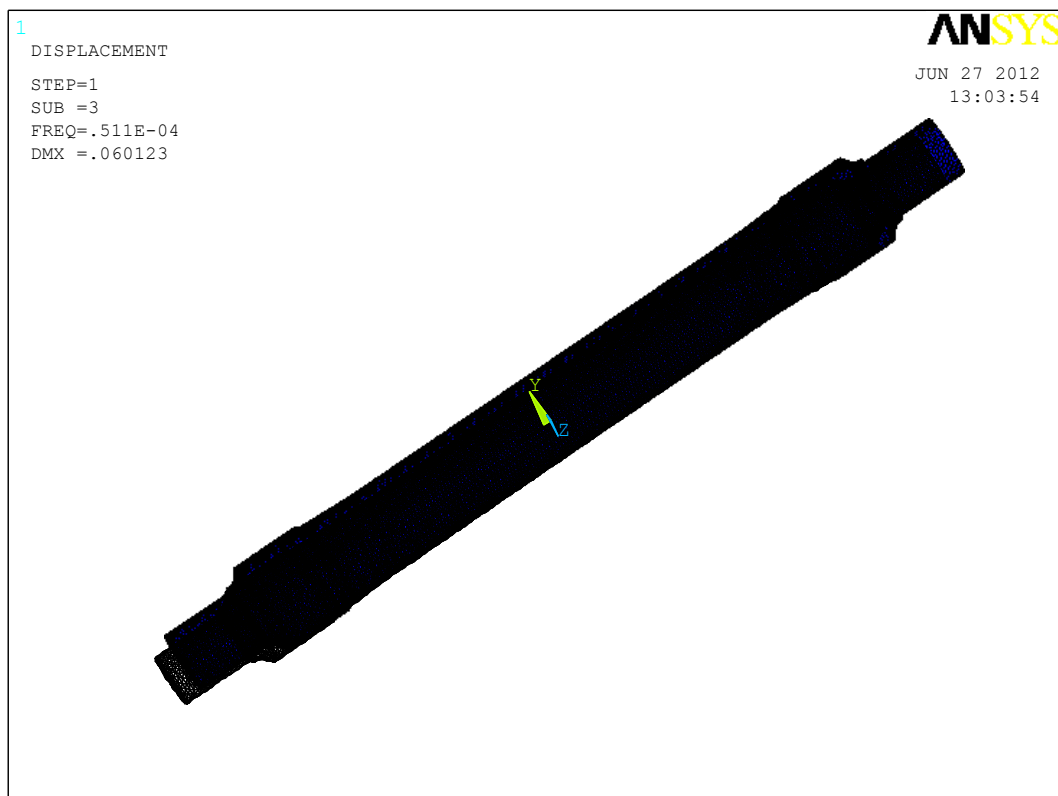


Figura 288. Modo propio de vibración número 3, según tabla 7 (capítulo 8).

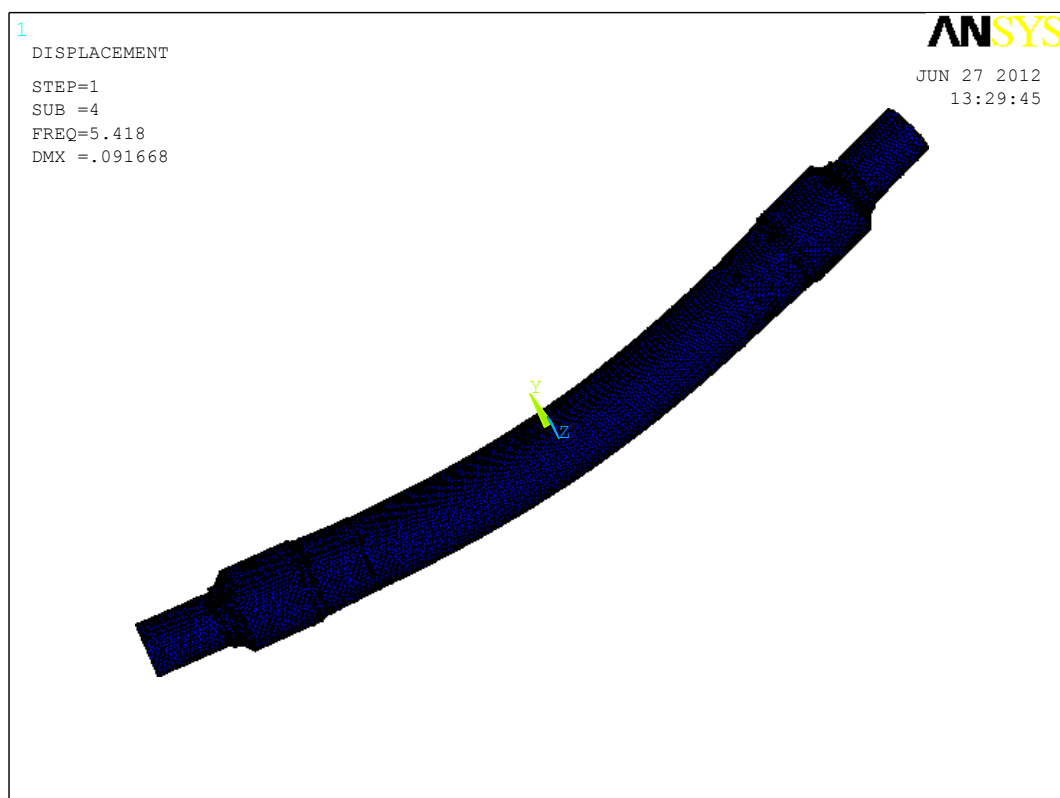


Figura 289. Modo propio de vibración número 4, según tabla 7 (capítulo 8).

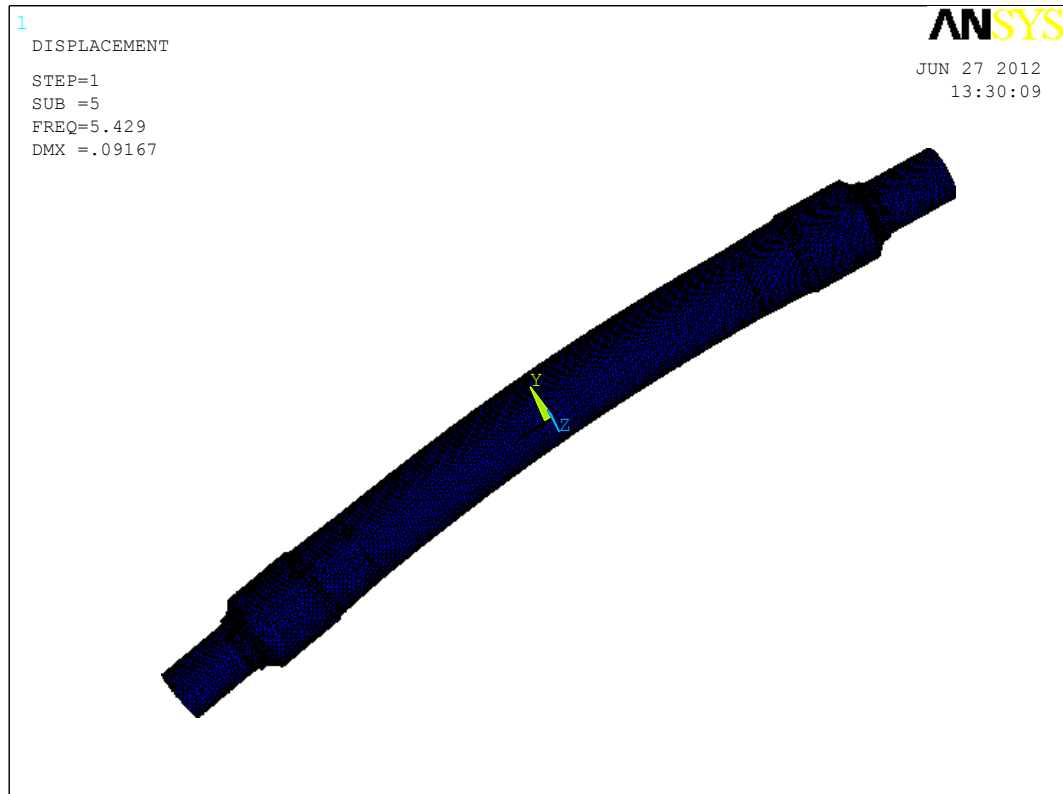


Figura 290. Modo propio de vibración número 5, según tabla 7 (capítulo 8).

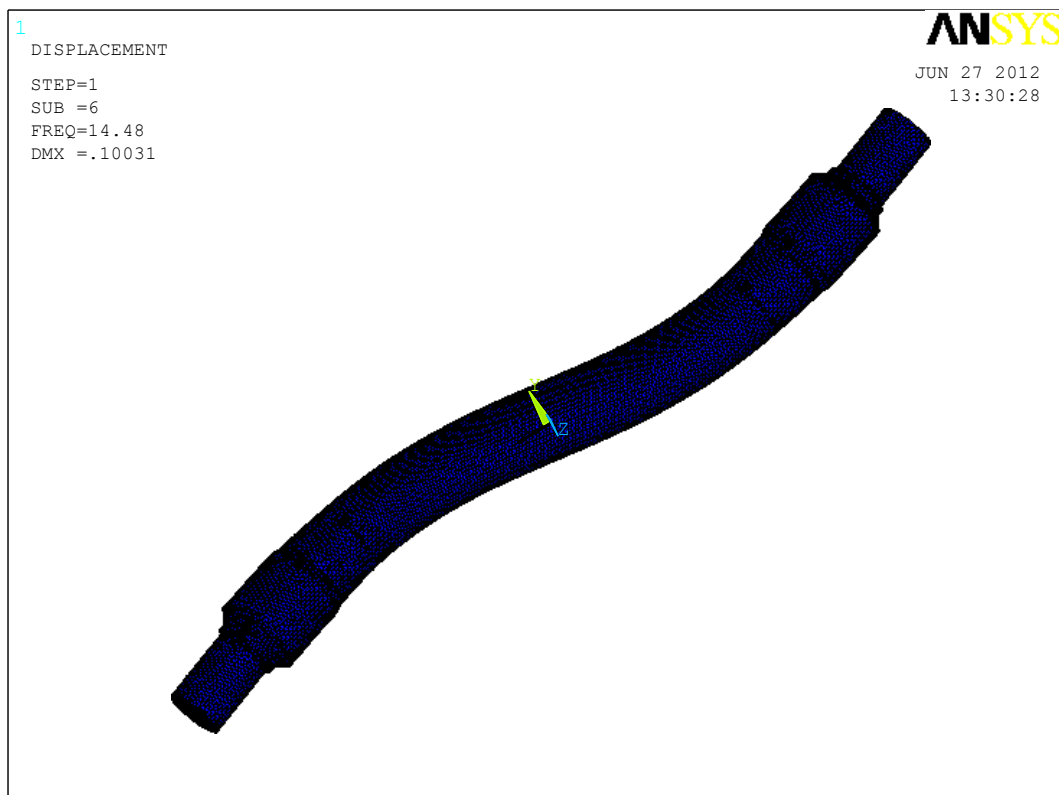


Figura 291. Modo propio de vibración número 6, según tabla 7 (capítulo 8).

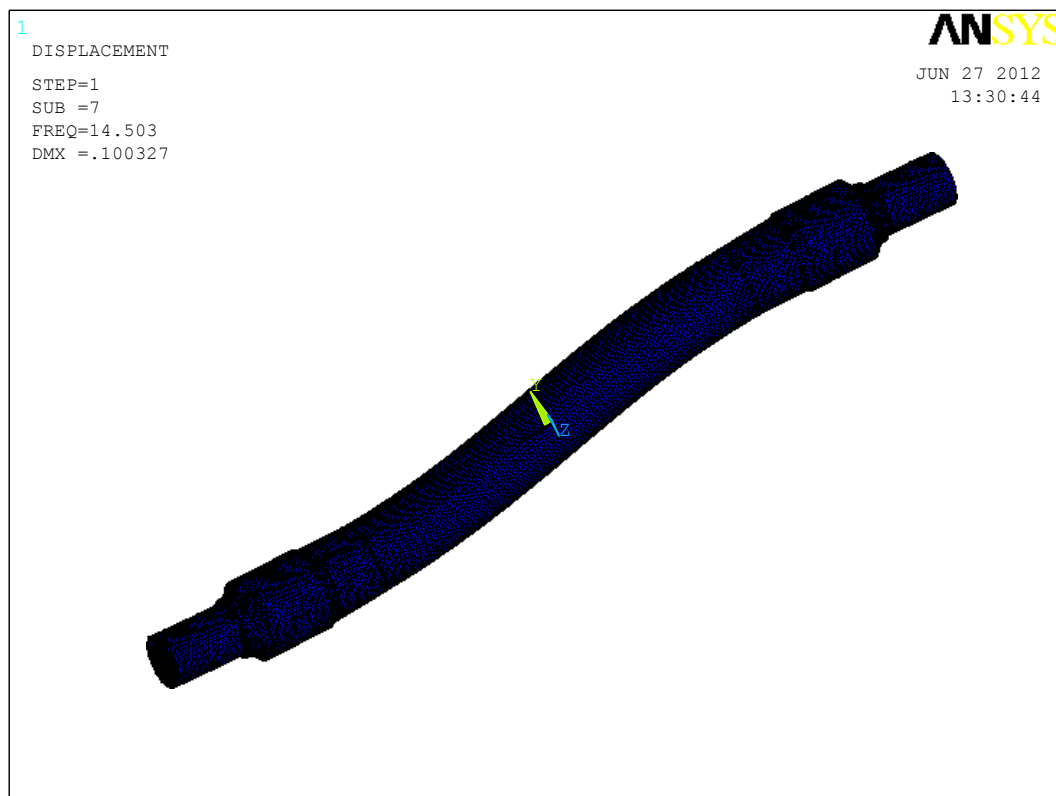


Figura 292. Modo propio de vibración número 7, según tabla 7 (capítulo 8).

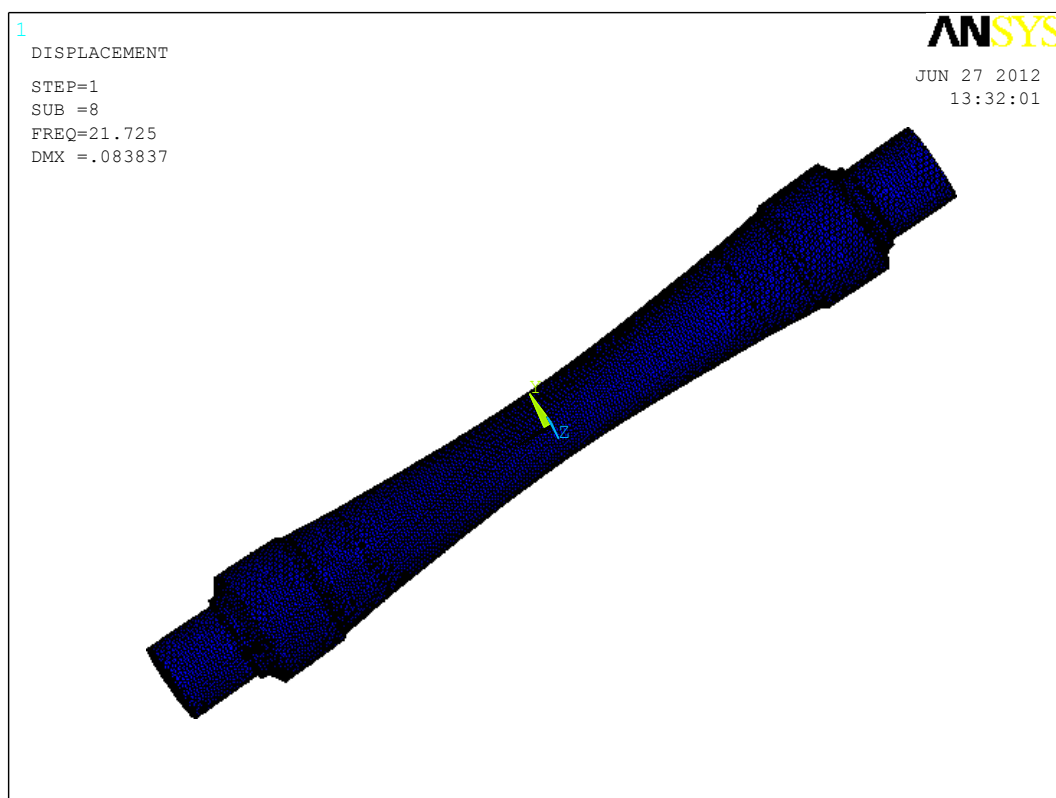


Figura 293. Modo propio de vibración número 8, según tabla 7 (capítulo 8).

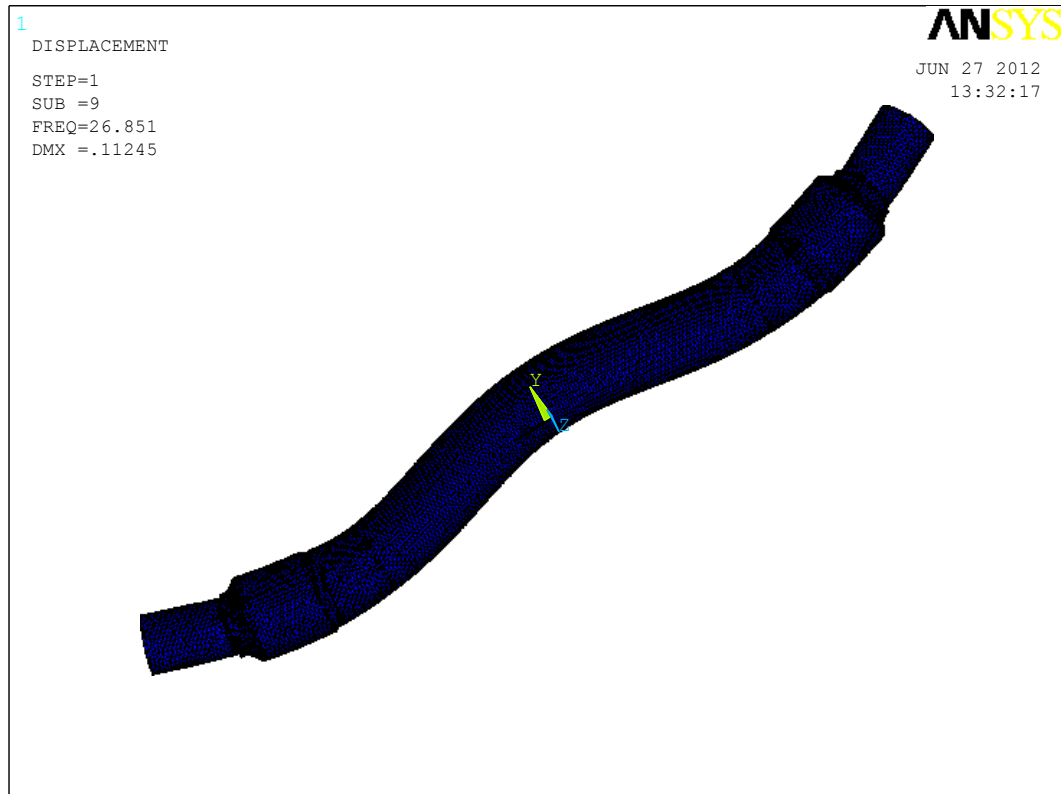


Figura 294. Modo propio de vibración número 9, según tabla 7 (capítulo 8).

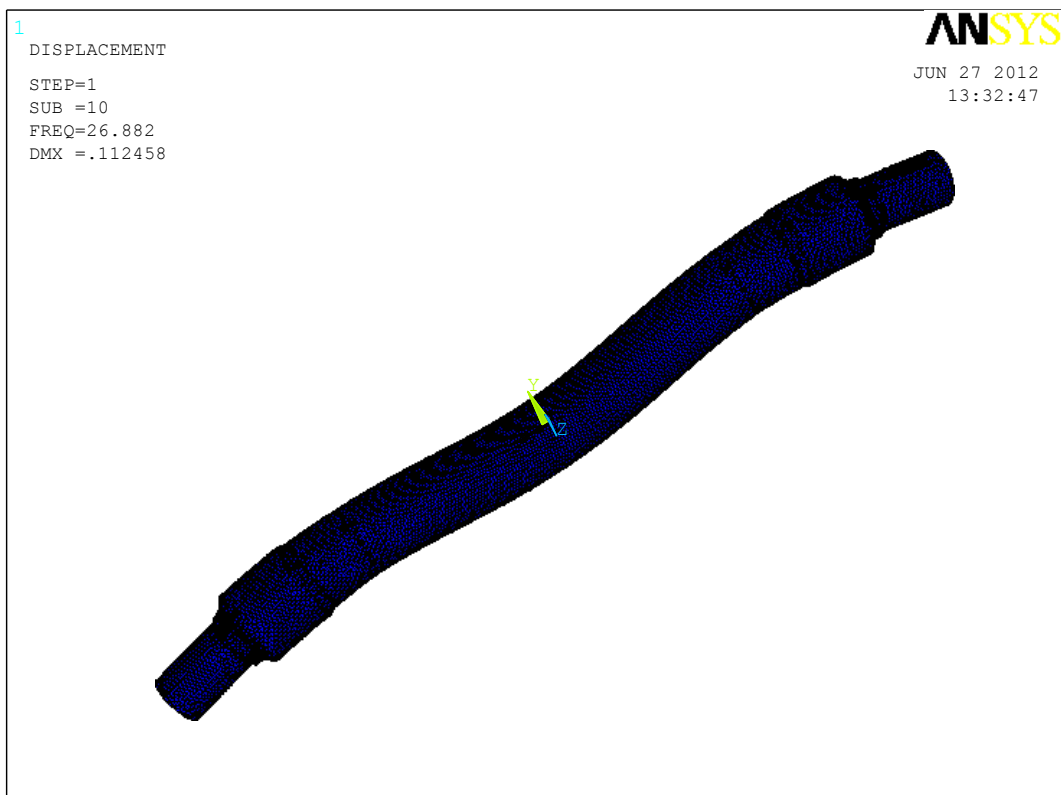


Figura 295. Modo propio de vibración número 10, según tabla 7 (capítulo 8).

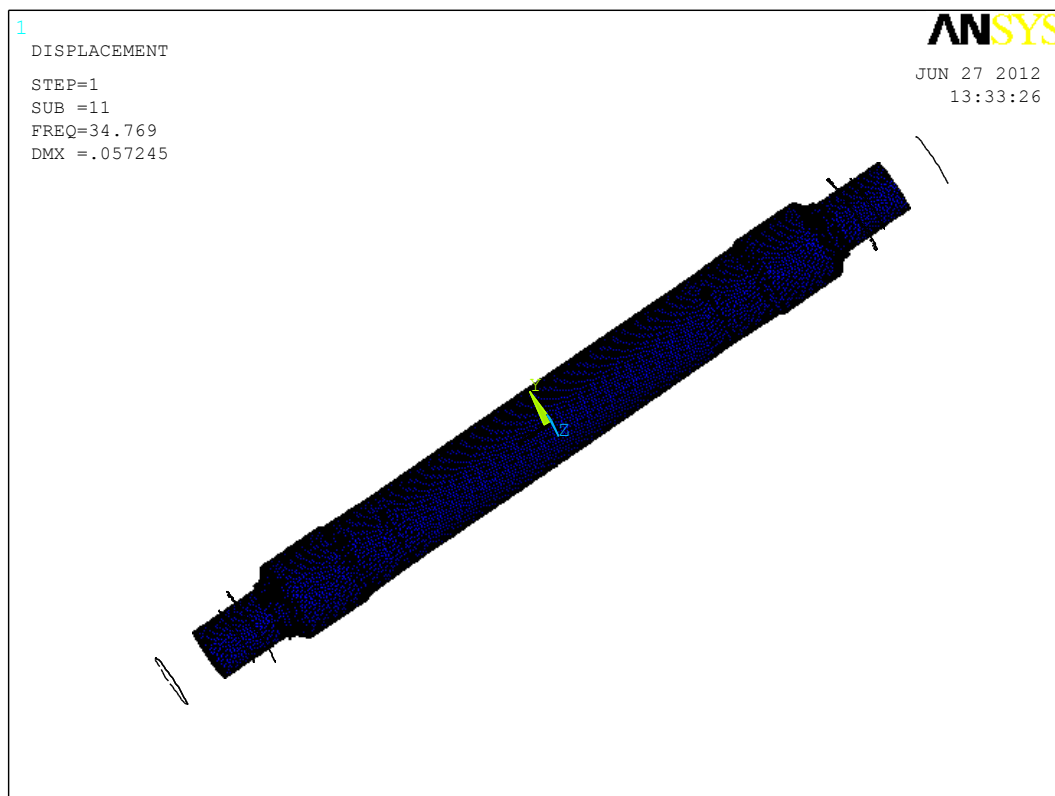


Figura 296. Modo propio de vibración número 11, según tabla 7 (capítulo 8).

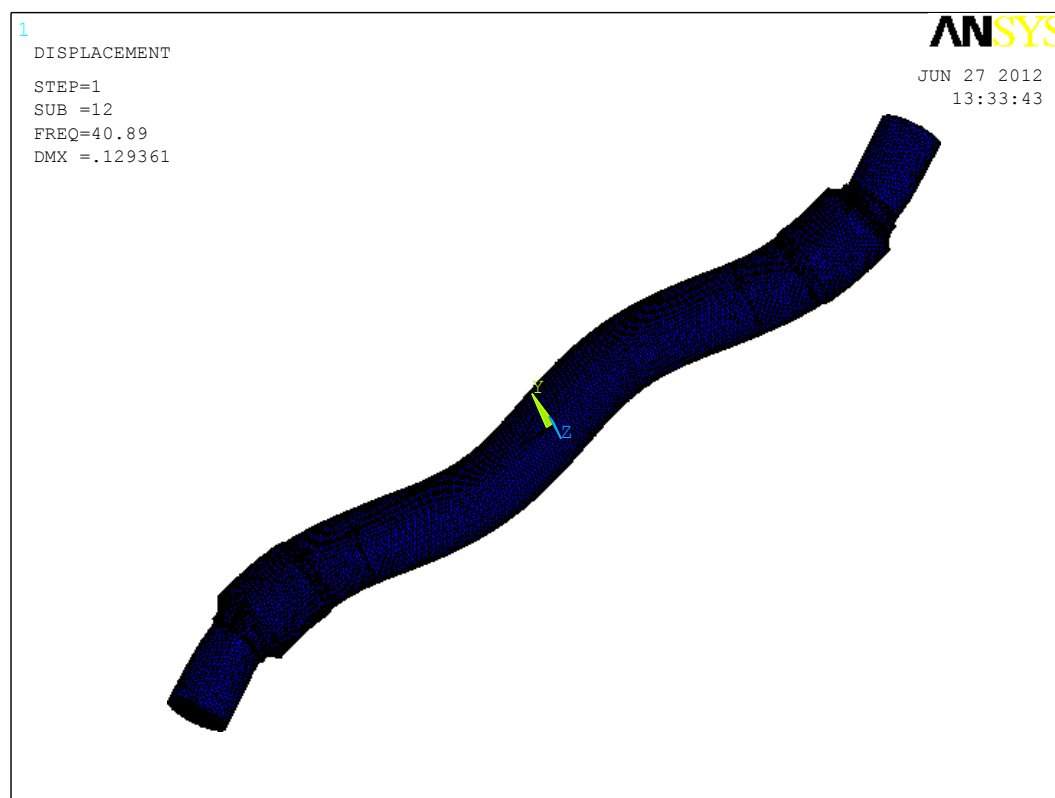


Figura 297. Modo propio de vibración número 12, según tabla 7 (capítulo 8).

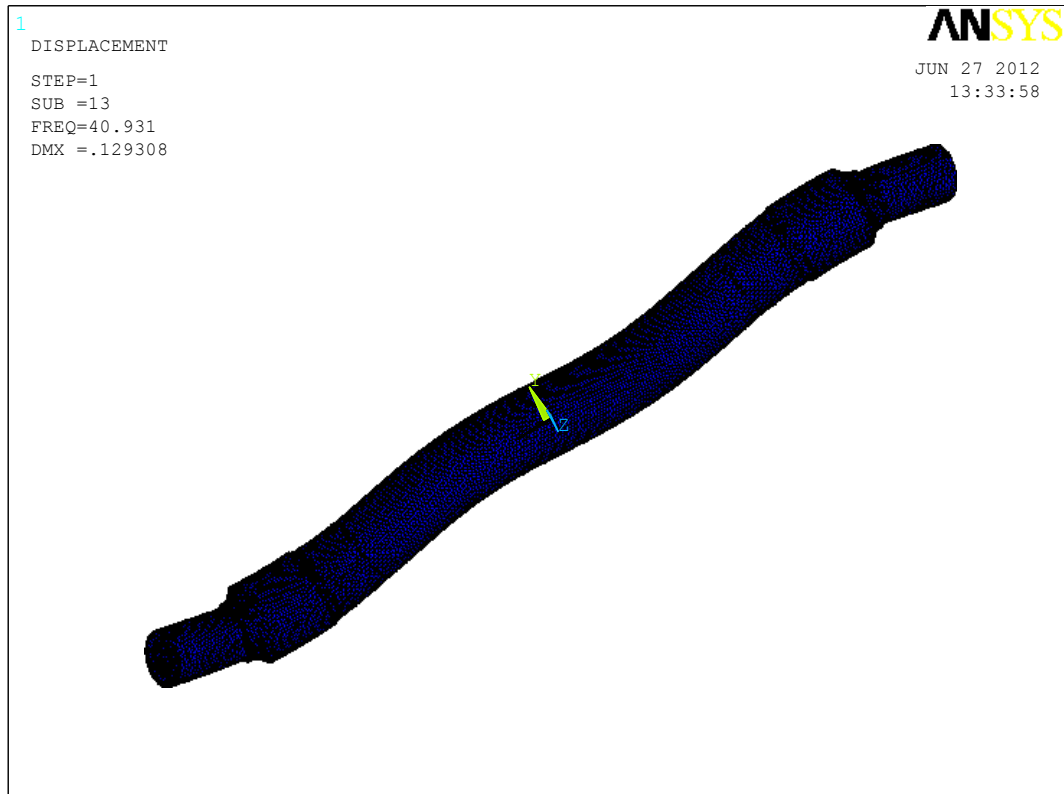


Figura 298. Modo propio de vibración número 13, según tabla 7 (capítulo 8).

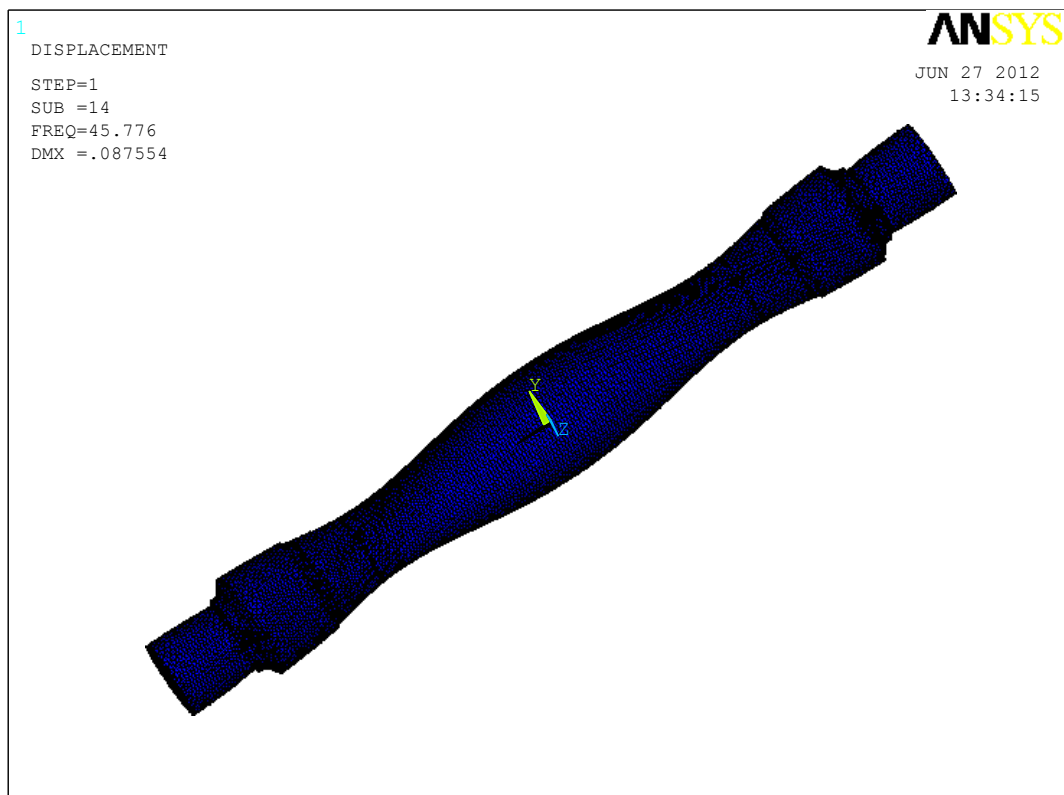


Figura 299. Modo propio de vibración número 14, según tabla 7 (capítulo 8).

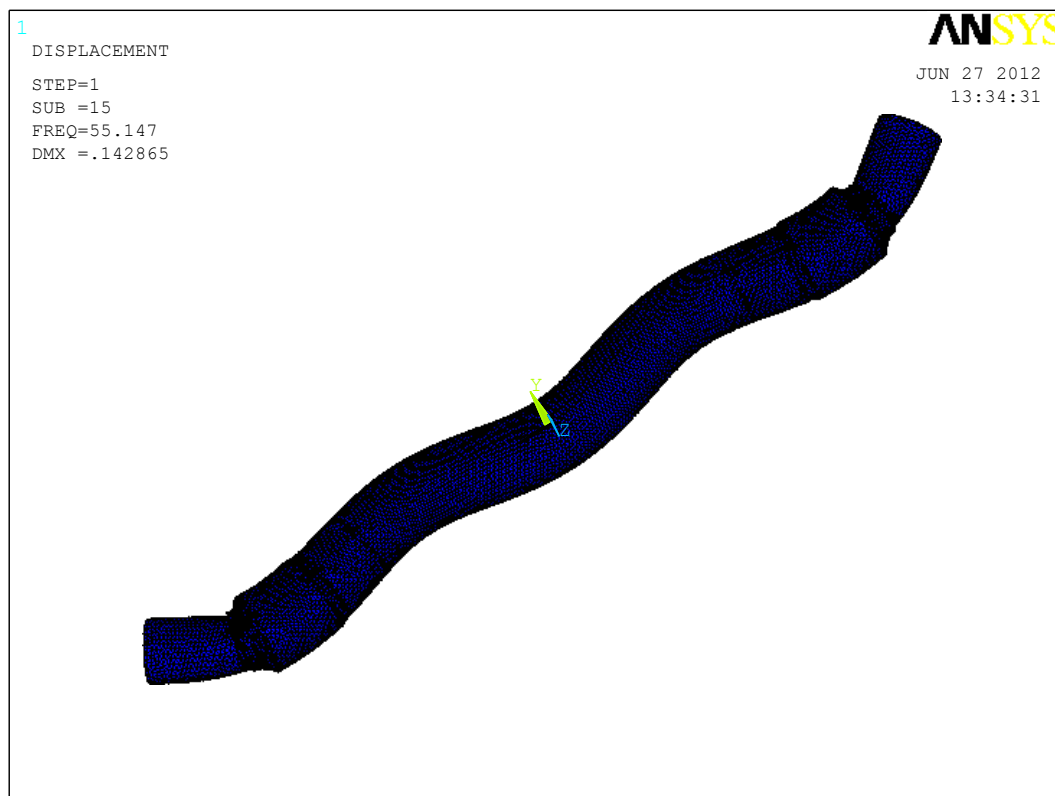


Figura 300. Modo propio de vibración número 15, según tabla 7 (capítulo 8).

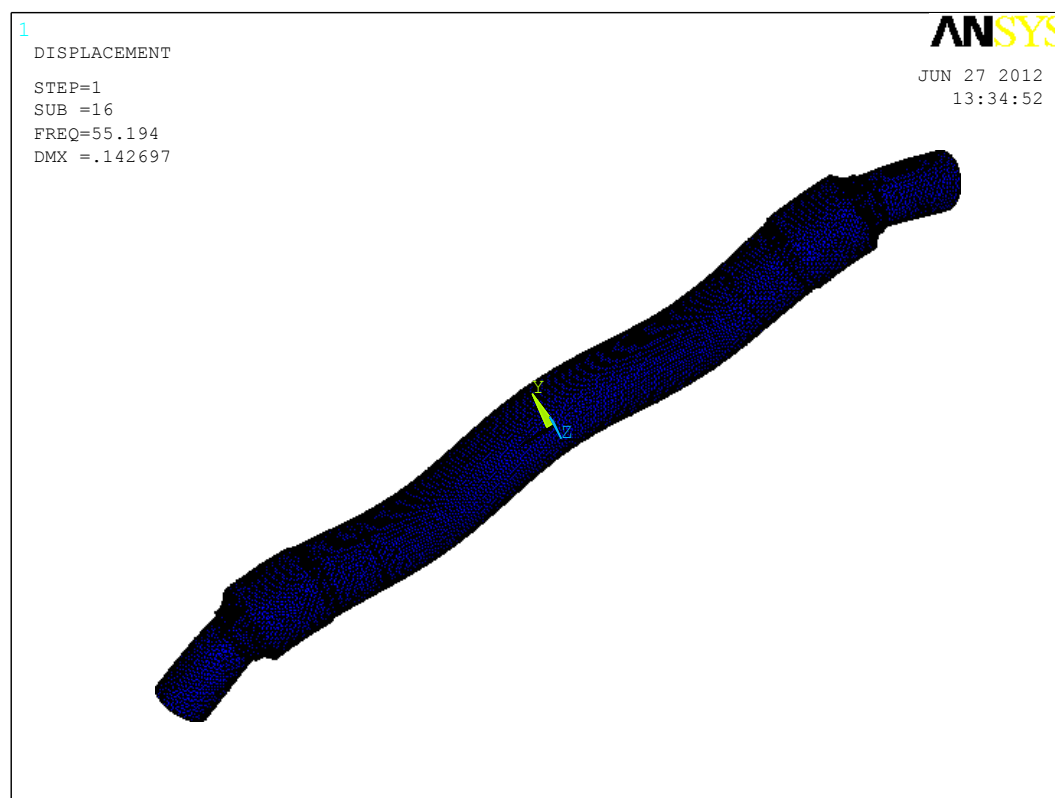


Figura 301. Modo propio de vibración número 16, según tabla 7 (capítulo 8).

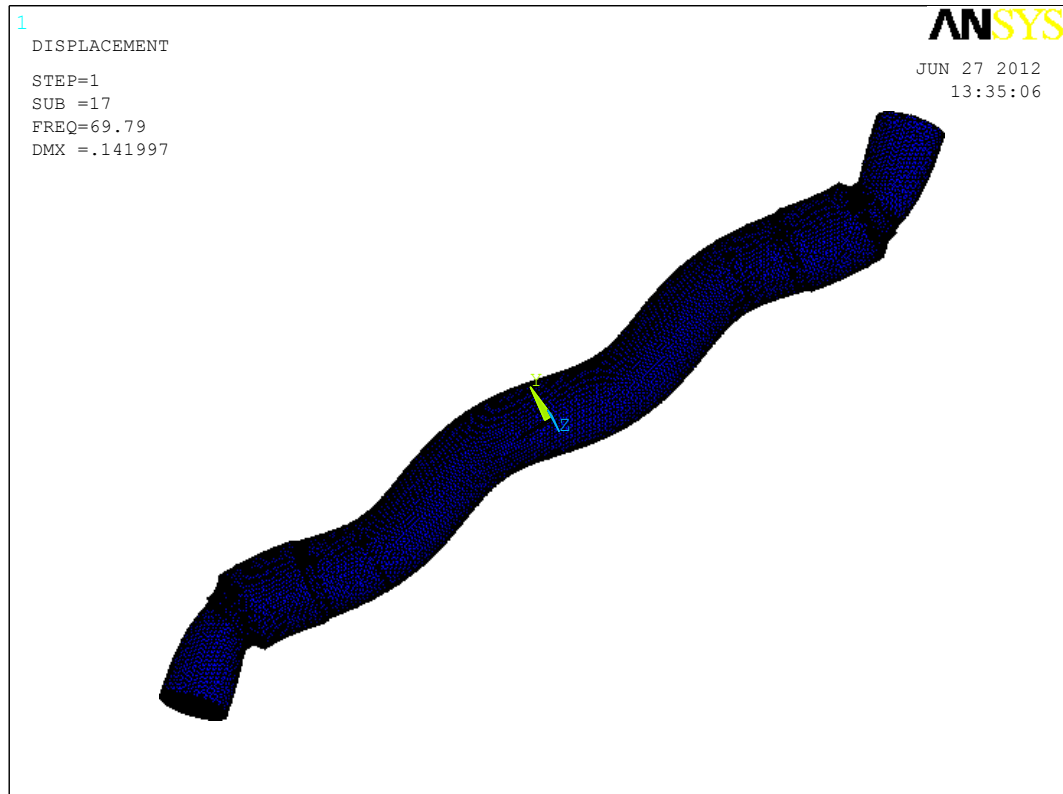


Figura 302. Modo propio de vibración número 17, según tabla 7 (capítulo 8).

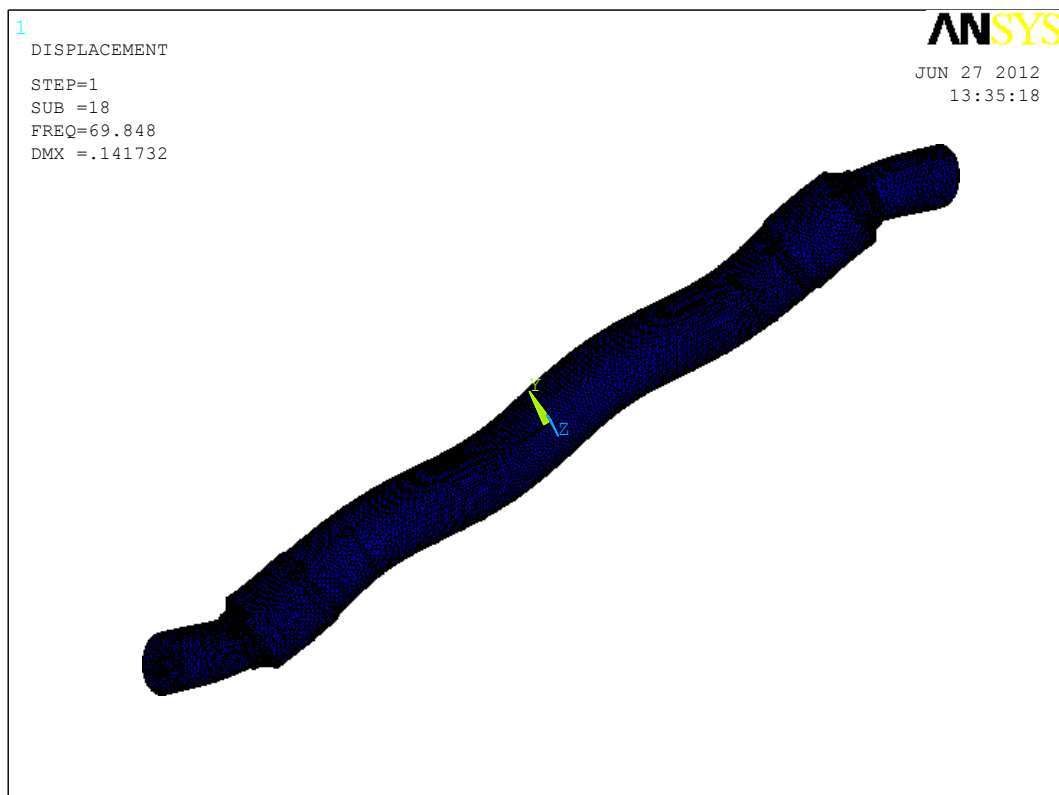


Figura 303. Modo propio de vibración número 18, según tabla 7 (capítulo 8).

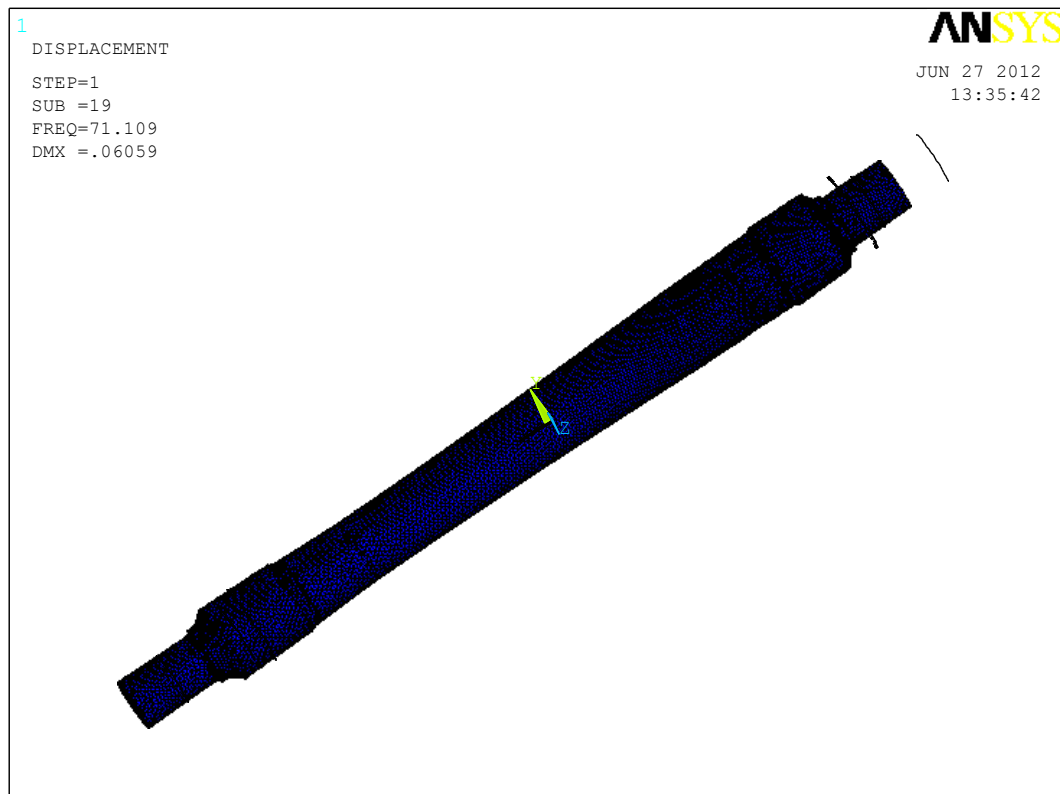


Figura 304. Modo propio de vibración número 19, según tabla 7 (capítulo 8).

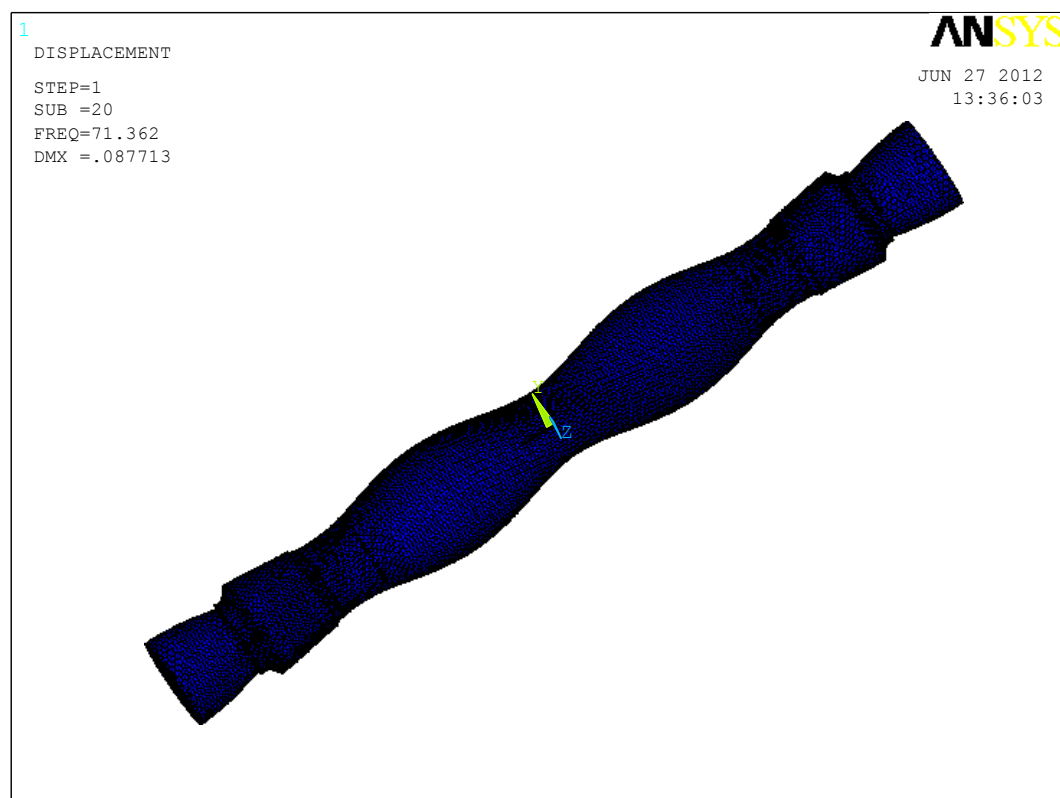


Figura 305. Modo propio de vibración número 20, según tabla 7 (capítulo 8).

